Math. P. 96 gb

Crelle

<36603897370011

<36603897370011

Ueber

[illegible]elen = Theorieen

=Gesch. 1412

Math. P. 96 gb

Ueber
Parallelen-Theorieen
und das
System
in der
Geometrie.

Von

Dr. Aug. Leop. Crelle,
Königl. Preußischem Ober-Baurathe.

Mit 4 Kupfertafeln.

Berlin, 1816.
In der Maurerschen Buchhandlung.
Poststraße Nr. 29.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

So wie derjenige Theil der Mathematik, in welchem die Größe veränderlich betrachtet wird, oder die, uneigentlich sogenannte höhere Mathematik, ganz der neuern Zeit angehört, so gehört die Elementar-Geometrie ganz den Alten zu. Die Neuern haben zu der Geometrie des Euclides weder etwas Wesentliches hinzugethan, noch eine Verbesserung des Inhalts und des Systems anbringen können. Denn giebt es im menschlichen Wissen irgendwo, wenigstens in einem bestimmten Umfange und aus einem bestimmten Gesichtspuncte genommen, etwas Vollkommenes, so ist es vielleicht die Geometrie des Euclides. Und haben die Neuern etwas hinzugethan, so sind es nicht wesentliche Sätze, sondern nur eine weitere Entwickelung der alten gewesen, oder eine andere Zurichtung derselben, für den jetzigen Bedarf und für die jetzige Gestalt der übrigen Größenlehre.

Bei aller dieser Vollkommenheit der Geometrie der Alten, die Jedem um so mehr einleuchtet, je weiter er in der Bekanntschaft mit dieser Wis-

senschaft vorrückt, ist dennoch das Gefühl einer gewissen Schwäche in ihr, vielleicht so alt als die Wissenschaft selbst. Kenner wissen, daß der Grund davon in der Parallelen-Theorie, und, wie jedes seine letzte Quelle hat, in dem eilften Axiome des Euclides liegt. Die Parallelen-Theorie ruht auf zwei Sätzen. Der erste heißt:

„Zwei gerade Linien, die von einer dritten „so geschnitten werden, daß die beiden in„nern, an einer Seite liegenden, Winkel „zusammen zwei rechte ausmachen, tref„fen sich, so weit man sie verlängert, nir„gends.“

Der Satz wird bis zur Evidenz bewiesen, vermöge des 16ten euclidischen Satzes des ersten Buchs, welcher enthält, daß jene innern Winkel, wenn die Linien sich schneiden, nicht zwei rechte sind. Schnitten sich also jetzt die Linien, so würden die Winkel nicht zwei rechte seyn, wider die Voraussetzung. Dieser Satz also stehet durch einen Beweis fest. Der Gegensatz heißt:

„Zwei gerade Linien, die von einer dritten „so geschnitten werden, daß die beiden in„nern, an einerlei Seite liegenden, Winkel „zusammen kleiner sind als zwei rechte, „treffen, genugsam verlängert, an dersel„ben Seite zusammen.“

Dieser Satz ist bei Euclides Grundsatz, das heißt: Satz ohne Beweis, welchen die Vernunft an sich selbst klar finden soll. Dagegen sträubt sich aber die Vernunft unabweislich, und hier ist die Schwäche der alten Geometrie, der man seit Jahrhunderten, wiewohl vergebens, abzuhelfen sich bestrebt hat. Es scheint fast, daß in der Art, wie dieses von den vielen Versuchen alle die gethan haben, die mißlangen, der Grund des Mißlingens, zugleich mit der Rechtfertigung der alten Geometrie selbst, und der Aufklärung des anscheinenden Widerspruchs liege: daß die alte Geometrie etwas Vollkommnes seyn soll, und dennoch eine Lücke zu haben scheint. Alle diejenigen nemlich, die eine Parallelen-Theorie nach euclidischen Begriffen von der Raum-Größe zu geben versucht haben, alle, die das Eilfte Axiom nach euclidischen Grundsätzen zu beweisen versucht haben, haben, wie es scheint, etwas eben so Unmögliches versucht, eben so nach einem Ziele das nicht existirt, gestrebt, als diejenigen, die den Kreis-Umfang, oder die Quadrat-Wurzel aus 2 und dergleichen in rationalen Zahlen auszudrücken sich bemühten. Dies läßt sich, dünkt mich, sogar beweisen. Die Geometrie des Euclides nemlich hat es überall nur mit begrenzten Räumen zu thun; soll nun für das Axiom bewiesen werden,

daß zwei Linien sich schneiden, ohne daß man den Durchschnitts-Punct oder seine Existenz vorher kennt; so ist noch gar kein begrenzter Raum gegeben, oder die Begrenztheit des Raumes ist noch gar nicht bewiesen; mithin hat man es auch noch mit gar keinem begrenzten Raume zu thun. Oder anders: der Gegensatz des eilften Axioms heißt:

„Zwei gerade Linien, die sich nicht begeg-
„nen, machen mit einer dritten zwei in-
„nere Winkel die zusammen zwei rechte
„sind."

Wäre dieses bewiesen, so würde daraus das Axiom unmittelbar folgen. Sind nemlich die innern Winkel nicht zwei rechte, so müssen die Linien sich nothwendig schneiden, weil, wenn sie sich nicht schnitten, die innern Winkel, nach dem Satze, zwei rechte seyn müßten, wider die Voraussetzung. Bei diesem Satze nun aber, wo von zwei Linien die Rede ist die sich nicht begegnen, giebt es offenbar einen nicht begrenzten Raum, anders als im 16ten Satze des Euclides, auf welchem der erste der beiden obigen Sätze von den Parallelen ruhet, welcher Satz es allerdings mit einem begrenzten Dreiecke zu thun hat. Wie soll nun mit begrenzten Räumen Etwas für unbegrenzte Räume bewiesen werden? Mich dünkt, vergleichs-

weise, eben so wenig als aus einem begrenzten Raume ein unbegrenzter Raum werden kann. Nach euclidischer Art also hat die euclidische Geometrie in der That auch keine Schwäche, und für sie, nach ihren eigenen Begriffen, etwas zu suchen, ist vergebens. Alles, was sich mit begrenzten Räumen für begrenzte Räume thun läßt, leistet sie bis zur Vollendung. Das eilfte Axiom ist, wie es scheint, einer der Uebergänge von dem Endlichen der geometrischen Vorstellung in das Unendliche, aus welchem die Vorstellung die endlichen Räume absondert, und wohin diejenige von endlichen Grössen nicht reicht und nicht reichen kann und darf, wenn sie bleiben soll was sie ist. Es liegt in dem 11ten Axiom sogar einer der vielen Beweise von der Weisheit des alten Geometers, daß er den Uebergang aus dem Endlichen, worin er bleiben wollte, in das Unendliche, woraus er abstrahirte, grade eben dahin, in sein Axiom legte, wo er in der That, nach seiner Art, am schicklichsten sich befindet; indem statt dieser Stelle noch Niemand eine bessere ihm hat anweisen können. Kenner der alten Geometrie sind darüber einig. Es fehlt also dieser Wissenschaft eigentlich nichts; sie ist abgeschlossen, und, um es zu wiederholen, so lange man bei ihren Ansichten stehen bleibt, vielleicht etwas Vollendetes.

Ich schicke diese Bemerkung voraus, um der Meinung vorzubeugen, als wolle ich zu den unzähligen Parallelen-Theorien, die den Euclides ergänzen sollen, eine neue hinzufügen; ich halte so eine vermeintliche Ergänzung für etwas ähnliches, wie das berüchtigte Quadriren des Kreises.

Nun aber entsteht die Frage: Muß die Schwäche bleiben? Daß sie demungeachtet statt findet, ist nicht zu leugnen; denn nicht zu leugnen ist, daß die Vernunft, wie oben erwähnt, von dem euclidischen Axiome nicht in dem Maaße befriedigt wird, wie es nöthig ist, um den Satz ohne Beweis hinzunehmen. Es giebt freilich Schriftsteller, die das wirklich leugnen, der andern nicht zu erwähnen, die das Axiom gar darum annehmen, weil es nicht möglich gewesen, einen Beweis dafür zu finden, die also gleichsam für die Wissenschaft eine Erfahrungs-Autorität anerkennen. Von solchen kann nicht die Rede seyn; sie sind nicht Mathematiker, denn die Mathematik erkennt keine andere Autorität als die der Vernunft und der Ueberzeugung. Aber auch jene erinnern doch im Grunde nur an die alte Lehre, daß man oft verschmäht, was man nicht zu erreichen vermag. Wer aufrichtig gegen sich selbst seyn will, der leugne dreist, daß er ohne Beweis das euclidische Axiom nicht begreife Ich meinestheils bekenne es offen.

Allein wie dann, wenn man dies nun wirklich leugnen müßte? wie steht es dann um die Geometrie? wie um die ganze ungeheure Masse von Sätzen und Erkenntnissen, die auf ihr ruhen? Gesetzt, die Parallelen-Theorie wankte, und sie wankte wirklich, wenn ihre Sätze durchaus nicht zu beweisen wären; so wanken alle Sätze die daran sich anschließen, und das sind die meisten, wenn nicht alle; die ganze Mathematik wankte, alle die stärkste Wahrheit, die der Mensch hat, wankte, ja stände nicht die Natur fester als des Menschen schwaches Erkennen, sie stürzte zusammen — Warlich das arme, wahrheitarme Geschlecht wäre zu bedauern! Der Mangel darf also unstreitig nicht bleiben, so lange noch dem Menschen an Wahrheit liegt; das Bestreben darf nicht aufhören, zur Ueberzeugung über Sätze zu gelangen, die an sich doch deshalb wahr seyn müssen, weil alle, auch die verwickeltesten Combinationen, die auf sie gegründet werden, der Natur getreu bleiben.

Mit endlichen oder begrenzten Raum-Größen ist, wie so viele Versuche zeigen, nichts auszurichten. Schon die Ueberzeugung des größten aller Meister in der Geometrie, des Euclides, die nachherige Erfahrung so vieler Jahre, und am Ende Gründe beweisen es. Was bleibt also übrig, als einen andern Weg zu versuchen, der vielleicht auf

das unübersteigliche Hinderniß nicht stößt. Wie es scheint, liegt dieser Weg nahe; seine Richtung wie sein Bedürfniß sind längst gefühlt worden, wiewohl vielleicht nicht ganz deutlich, besonders das letzte nicht. Ungefähr Folgendes führt darauf.

Die Geometrie, wie jede andere Vernunft-Wissenschaft, ringt sich nemlich gleichsam aus dem Unendlichen in das Endliche hervor, um dort, unbegrenzt sich entwickelnd, wiederum in das Unendliche sich zu verlieren. Sie gleicht des Menschen Wesen selbst, dessen Quelle wie sein Ziel das Unendliche ist. Die Kunst in der Wissenschaft ist nun, den leichtesten, vernunftgemäßesten Uebergang aus dem Unendlichen in das Endliche zu finden. Dieser Uebergang ist in der alten Geometrie, nachdem mit dem Endlichen das Aeußerste geleistet worden, gleichsam auf einen Punct, in das einzige eilfte euclidische Axiom zusammengedrängt, nach der Gewohnheit der Alten, die in der Wissenschaft, wie überall, Klarheit im endlichen Gesichtskreise für das höchste Gut achtend, des Unendlichen so viel zu sich herabzuziehen pflegten als möglich (freilich damit eigentlich, unbewußt, sich selbst in das Unendliche zu einer nie wieder erreichten Höhe hinaufhebend) dann aber den Uebergang zu dem, gleichsam seinerseits in höhere Höhen sich zurückziehenden Uebersinnlichen dunkel, und das Ueber-

sinnliche geheimnißvoll und unberührt ließen. Daß jener Uebergang in der alten Geometrie so schroff und jähe ist, daß das Urtheil, und noch weniger das Vernunftgefühl (so könnte man fast, bildlich diejenige Instanz des Geistes nennen, an die man solche Grundsätze richtet) ihn nicht zu übersteigen vermag, scheint die Ursach der anscheinenden Schwäche der Geometrie und zugleich den Grund auszumachen, warum man ihr abzuhelfen vergebens sich abmühet. Das Mittel, zur Ueberzeugung zu kommen, wäre also, statt eines plötzlichen, gleichsam einen allmäligen Uebergang von dem Unbegrenzten zu begrenzten Größen zn versuchen. Daß ein solches Mittel ausführbar ist, scheint man behaupten zu dürfen, und das Gegenwärtige ist ein Versuch, eine solche Behauptung zu rechtfertigen. Der Uebergang geschiehet, wie sich leicht einsehen läßt, dadurch, daß man nicht bei dem Begriffe begrenzter Räume allein stehen bleibt, sondern den Begriff noch zum Theil unbegrenzter Figuren, nemlich der Winkel-Räume und der Räume zwischen Parallelen einführt. Verschiedene Parallelen-Theorien, zum Beispiel die von Bertrand, die indessen in sich allerdings noch Lücken haben mögen, thun schon so Etwas. Der Weg ist also nicht völlig ungebahnt. Es bleibt nur zuvor die wichtige Frage übrig: ob der Be-

griff von unbegrenzten Räumen in die Reihe treten dürfe mit demjenigen von begrenzten. Von dieser Frage hängt alles ab. Die Geometer, die an den Ansichten der Alten halten, behaupten, man habe einen deutlichen Begriff nur von begrenzten Räumen. Allein es läßt sich, dünkt mich, beweisen, daß es nicht so sey. Eine Größe nemlich ist, was sich vermehren und vermindern läßt, und den Begriff von Größe bekömmt man durch Vergleichung mit einer andern von gleicher Art, und nur dadurch. Nun läßt sich ein Winkel, als Raum betrachtet, oder ein Raum zwischen Parallelen, allerdings theilen, z. B. halbiren, desgleichen gegen andere Winkel oder Parallel-Räume vergleichen, mithin ist Winkel und Parallel-Raum zuverlässig eine Größe, und folglich wirklich ein Vorwurf der Geometrie. Oder anders: wenn Jemand behauptete, er habe keinen deutlichen Begriff von einem nicht überall begrenzten Raume, so läßt sich gegenseitig fragen, welchen Begriff er denn vom begrenzten Raume habe? — doch schwerlich einen andern, als der durch Vergleichung mit andern begrenzten Räumen entstehet. Dies aber eingestanden, so läßt sich ihm ein in völlig eben dem Maaße klarer Begriff von unbegrenzten Winkel- und Parallel-Räumen geben; denn auch diese können gegen andere Räume derselben Art, völ-

n so verglichen werden wie begrenzte Räume.
nze Schwierigkeit liegt darin, daß der Be-
nbegrenzter Winkel- und Parallel-Räume
gs nicht durch endliche Räume gegeben
kann, weil in der That begrenzte und unbe-
Räume gänzlich verschiedene Dinge
Verlangte Jemand die Construction des
vom Winkel-Raume durch den Begriff
er Räume, so verlangte er allerdings et-
en so Unmögliches als eine Parallelen-
nach euclidischen Begriffen. Denn das
kann deshalb nie das Unendliche werden,
sonst aufhören würde ein Endliches zu
diese beiden Dinge sind und bleiben völlig
und heterogen, und der endliche Raum
zum Winkel- und Parallel-Raume werden,
ekehrt. Hingegen, die Grundbegriffe vom
n und unbegrenzten Raume sind durchaus
eich, eben weil es von beiden Räumen
eigentlich gar keine giebt, sondern alles
Vergleichung stehen bleibt, die dann
mit völlig gleicher Klarheit möglich ist.
dern Vorstellung, daß der unbegrenzte
r die Form sey, worin der sinnliche be-
aum gedacht wird, und daß also Winkel-
lel-Räume, als Theile des unbegrenzten

begegnen. Eines Theils nemlich ist vom ganzen unbegrenzten Raume nicht die Rede. Was gar keine Grenze hat, ist allerdings nicht Vorwurf der Geometrie, weil keine Vergleichung statt findet. Die Winkel- und Parallel-Räume sind nur Theile des unbegrenzten Raums. Sey nun auch wirklich wiederum der Theil nur Form der Anschauung anderer, nemlich der begrenzten Räume, so ist es doch schon genug, daß der Begriff von Theil zugegen ist. Dieser geht die Vergleichung an, und sie ist der Vorwurf der Geometrie. Andern Theils hindert nichts, auch das Formale zugleich als Reales sich vorzustellen, nemlich das Reale, vermöge der Form, zu setzen. Geschiehet aber das, so hat man allerdings einen Begriff sogar vom unbegrenzten Raume. Der Winkel- und Parallel-Raum darf also wirklich in der Geometrie mit eben dem Rechte auftreten als der begrenzte Raum. Man verwerfe ihn nicht, denn sonst ist man genöthigt, um consequent zu bleiben, auch den des begrenzten Raums nicht zu dulden, weil von beiden die Grundbegriffe gleich dunkel sind, während das, was die Vergleichung angehet und was den Gegenstand der Wissenschaft ausmacht, gleich klar ist. Geht man näher in die Sache ein, so findet sich, daß der Begriff des Winkel-Raums sogar deutlicher ist als der: der Winkel sey die Neigung

zweier Linien gegen einander. Diese Definition beim Euclides schauet, wie mich dünkt, gleichsam noch rückwärts nach dem unbestimmten Unendlichen. Ich meines Theils fühle, daß ich von der Neigung zweier Linien keinen geometrisch klaren, nicht einmal deutlichen Begriff habe, weil ich nicht deutlich sehe, wie eine Neigung sich theilen läßt, also die Characteristik der Größe an ihr nicht klar erkenne, die ihr allein ein Recht auf eine Stelle in der Geometrie giebt.

In sofern nun der Winkel- und Parallel-Raum unter den Größen auftreten darf und auftreten muß, weil er es ist, der den natürlichen Uebergang von dem Unendlichen zu dem Endlichen bildet, kommt es nun weiter darauf an, zu zeigen, wie, vermöge dieses Begriffs, die Geometrie angriffsfrei werden soll. Die Bertrandsche und ähnliche Theorien bedienen sich, wie gesagt, ähnlicher Begriffe, allein sie haben noch andere Lücken, z.B. die in dem Begriff der geraden Linie liegen und andere, die vielleicht auch ihrerseits zum Schaden der Ansicht beigetragen haben. Zu versuchen, wie sich von hier ab, jetzt nach euclidischer Art, das heißt mit euclidischer Strenge, die Geometrie construiren lasse, ist einer der beiden Zwecke der gegenwärtigen Abhandlung.

Der andere Gegenstand dieser Abhandlung ist

das System oder die Eintheilung und Ordnung des Inhalts. Wenn gleich oben im Eingange gesagt ist, daß man an der alten Geometrie auch das System als ein Muster anerkennen müsse, und jetzt dennoch über das System der Geometrie Bemerkungen folgen sollen, so liegt darin dennoch kein Widerspruch. Schon wenn man andere Grundbegriffe annimmt, wie oben der von dem Winkel, so ist klar, daß deshalb auch die Ordnung der Sätze sich ändern muß. Allein, auch ohne Rücksicht darauf, scheint ein passenderes System für die jetzige Geometrie nöthig. Die Nothwendigkeit ist oft gefühlt und die Ausführung versucht worden; allein auch hier ist der Versuch gewöhnlich nicht gelungen, vielleicht wiederum, weil er an dem, was in dem fest bezeichneten Umkreise der alten Geometrie liegt, hat ändern wollen, woran sich, wie es scheint, nichts ändern läßt. Die Aenderung hat einen andern Gegenstand. Die alte Geometrie nemlich kannte zusammenhängend, fast nur das Gerade und den Kreis. Nun erwäge man, wie ungeheuer in der neuern Zeit die Masse von allgemeineren geometrischen Sätzen, von den krummen Linien und Flächen, angewachsen ist, und es ist klar, daß die neuere Geometrie schon deshalb nicht mehr in die alte passen kann. Es ist auffallend, wie sehr diesmal das System hinter der Sache

zurück geblieben ist, da zuweilen wohl umgekehrt das System dem Inhalte vorzueilen pflegt. Man betrachte die große schöne Sammlung von Sätzen, die unter dem, übrigens gleich jeder andern Benennung die ein gewisses Selbstlob ausspricht, unpassenden Namen: höhere Geometrie bekannt ist. Wo stoßen sich diese Sätze nicht umher! Bald müssen sie sich bequemen zur Algebra, bald zur sogenannten Differential- und Integral-Rechnung zu gehören, bald bilden sie stückweise eigene Lehren, und unter den Flächen zweiter Ordnung muß willkührlich, die Kegelfläche die krummen Linien zweiter Ordnung in der Ebene entstehen lassen u. s. w.

Ist es da nicht auffallend, daß nicht längst ernsthaft versucht worden ist, diese große Masse von Kenntnissen einigermaßen zu ordnen. Gewiß ist zu wünschen, daß Jemand einen Abriß der Geometrie, wie sie wirklich in der neuern Zeit ist, geben möge. Sie ist, besonders seit Erfindung der Rechnung mit veränderlichen Größen, so ungeheuer erweitert worden, daß kein altes System mehr dafür passen kann, und der Gegenstand wohl der Mühe werth wäre, um so mehr, da System und Ordnung durchaus nichts Unwesentliches, sondern vielmehr, wie überall, so auch hier, das erste Erforderniß einer klaren Einsicht und eines guten Ge-

deihens u.d. Meines Erachtens wären folgendes die Hauptregeln für ein solches System. Die Geometrie ist die Wissenschaft der Größen im Raume, die durch ihre Grenzen bestimmt werden. Diese Grenzen können gerade oder krumm seyn. Die Geometrie zerfällt also in zwei natürliche große Hauptabtheilungen: in die Lehre von geraden und in die Lehre von krummen Begrenzungen der Räume. Die erste könnte man, wenn man will, die Elemente nennen. Der Kreis gehört zwar als krumme Linie in den zweiten Theil, und er würde auch vollständig nur dort abzuhandeln seyn: Man könnte aber, um die einfachen Sätze vom Kreise gleich zur Hand zu haben, und für ein geringeres Bedürfniß abzusondern, auch als Auszug aus dem zweiten Theile, wo sie in ihrer unveränderten Gestalt vorkommen, dem ersten Theile sie anschließen. Ein solcher Auszug wäre geeignet, darin mit der Zeit Mehreres aus dem zweiten Theile, z. B. von den Linien und Flächen zweiter Ordnung, so wie das Bedürfniß mit der hoffentlich vorschreitenden Cultur es erfordert, aufzunehmen. Jeder der beiden obigen Theile zerfiele weiter in zwei Abtheilungen: in die Lehre von den Linien und in die von den Flächen, und so ferner in kleinere Unterabtheilungen, die ich nicht verfolgen will. Der erste Haupttheil enthielte die Linien und Flächen

der ersten Ordnung, oder die gerade Linie und die Ebene; der zweite die Linien und Flächen der übrigen Ordnungen. Dieser erste Theil würde ohne Gleichungen und Calcul, wenigstens die vorbereitenden Sätze, unter rein geometrischer Anschauung vorgetragen; bei dem zweiten Theile würde die Rechnung mit der Geometrie, vermöge der Gleichungen zwischen den die Linien und Flächen bestimmenden Coordinaten, verbunden werden; und zwar würden hier Coordinaten aller Art angewendet, deren es wirklich mehrere giebt als die parallelen, und die aus einem Puncte, nemlich so viele als sich aus den verschiedenen Bestimmungs-Arten eines geradlinigen Dreiecks, durch drei Seiten, durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und durch zwei Winkel und eine Seite, entweder eine anliegende oder die eingeschlossene, ableiten lassen. Die zweite Unterabtheilung jedes Haupttheils, von den Flächen, würde, als die Wichtigste, mit aller der Sorgfalt und Ausführlichkeit abgehandelt, die mit ihrer größern, gleichsam die Natur erst vollständig erfassenden Allgemeinheit, in Verhältniß stehet; auch würde, wegen der Allgemeinheit, der zweite Haupttheil, neben dem analytischen Vortrage, der Anschauung wegen, zugleich auch synthetisch vorgetragen werden u. s. w. Die weitere Ausführung dieses Plans für den

zweiten Theil erfordert die Ausarbeitung selbst. Für den ersten Theil, der die Lehren von den geraden Linien und Flächen enthält, wäre das System, wie es aus der Sache selbst zu folgen scheint, ungefähr Folgendes. Ehe man in der ersten Abtheilung, die von den geraden Linien in der Ebene handelt, zu den umschlossenen Figuren kommt, würde zuerst von der geraden Linie an sich, und darauf von den mit zwei geraden Linien begrenzten, also zum Theil noch unbegrenzten Räumen, nemlich den Winkel- und Parallel-Räumen, gehandelt, welche Untersuchung zu der, der verschiedenen Winkel zwischen 2 und 3 sich schneidenden geraden Linien führt, die unter andern den, unter der Benennung: Theorie der Parallelen, bekannten Gegenstand enthält. An den umschlossenen Figuren unterscheidet man weiter Größe und Gestalt. Die Figuren können gleich groß seyn ohne Gleichheit der Gestalt, und gleich gestaltet ohne gleiche Größe. Figuren, die gleiche Größe und Gestalt zugleich haben, sind einander gleich (congruent, deckend), ihre Grenzen fallen in einander, oder können einerlei Ort im Raume einnehmen. Figuren, die gleiche Gestalt (gleiche Winkel und gleich proportionirte Seiten) haben, sind einander ähnlich; und Figuren, die gleiche Größe haben, aber dabei verschieden gestaltet seyn können, sind

gleich groß oder von gleichem Inhalt. Nicht ganz umschlossene Figuren, Winkel- und Parallel-Räume, können nur einander gleich (ähnlich und gleich groß zu gleicher Zeit), nicht eins von beiden allein seyn. Daraus folgen drei Hauptabschnitte nach diesen Eigenschaften; die Zahl der Seiten der Figuren giebt die Unter-Abtheilungen, z. B. zwei derselben: von Dreiecken und Vielecken. Da Vergleichung überhaupt das Geschäft der Geometrie ist, so kommt nicht allein das Gleich und Aehnlich, sondern es kommen auch die verschiedenen Verbindungen des Größer und Kleiner mit dem Gleich und Aehnlich vor. Es ist vorauszusehen, wie sich ähnliche Eintheilungen für den zweiten Abschnitt, für die Lehre von Ebenen und Flächen, werden machen lassen. In diese Abtheilungen gehören denn auch alle die Lehren von den Vielecken und dergleichen, die unter dem Namen Polygonometrie und anderen Benennungen zerstreut sind, nachdem die Lehre von der Vergleichung der Winkel untereinander und mit den Seiten umschlossener Figuren, mittelst Perpendikel auf die Schenkel, oder die uneigentlich sogenannte Trigonometrie, voraus-geschickt worden. Für die elementare Körperlehre finden sich ähnliche Sätze, nach Vorausschickung der Lehre von Vergleichung der Neigungen der Ebenen mit einander und mit ihren Durchschnitts-

Linien, ebenfalls mittelst Perpendikel, oder der wohl eben so uneigentlich sogenannten sphärischen Trigonometrie, für die warlich die Kugel eben so unwesentlich ist wie für die ebene Trigonometrie der Kreis. Was die äußere Form des Vortrages betrifft, so wird die euclidische allemal die beste bleiben, und man wird etwas um so Vorzüglicheres liefern, je genauer man ihr folgt. Nur scheint es jetzt zweckmäßig, die Aufgaben, wegen ihrer großen Zahl, sämmtlich aus dem theoretischen Lehrbegriffe der Geometrie herauszulassen. Perpendikel zum Beispiel, Proportional-Linien und dergleichen, auf dem Papier oder auf einer Tafel, oder wie man sonst will, und auf dem Felde zu ziehen, sind schon allzugleichartige Dinge, als daß sie nicht zusammen in ein und dieselbe Lehre, in die eigene Sammlung der Aufgaben, oder in die practische Geometrie und Geodäsie gehören sollten, die dann ihre Lehrsätze aus der theoretischen Geometrie nimmt. Auch interessiren sie die theoretische Geometrie nicht, weil es für diese völlig gleichgültig ist, wie ein Perpendikel gezogen, ein Winkel getheilt wird u. s. w. Sie darf setzen, daß das Nöthige geschehen ist, sobald sie nur den genauen Begriff davon gegeben, oder die Möglichkeit bewiesen hat. Dadurch wird der Lehrbegriff zugleich bedeutend concentrirt, und dieses Concentriren ist auch noch eins von den

Dingen, die so sehr zu wünschen sind; denn man kann von der Reife einer Wissenschaft wohl nur erst dann überzeugt seyn, wenn ihr Lehrbegriff so weit als möglich concentrirt; wenn das System so viel als möglich gereinigt ist von allem Unwesentlichen, von allem entbehrlichen Raisonnement, dabei befreiet ist von denen in neuerer Zeit nur zu oft sich einschleichenden überspannten Vorstellungen und von dunkeln Definitionen und barbarischen Benennungen so wie von dem vermeintlich Höheren und Sublimen, das eigentlich wohl nur mangelnde Klarheit verbirgt und in der That in das Jugendalter einer Zeit oder Wissenschaft gehört; wenn der Lehrbegriff, mit einem Worte, in der möglichsten Einfachheit, und in wirklicher, auch wiederum nicht gesuchter sondern bewußtloser Bescheidenheit, wahr und klar, wie die Sache selbst ist, dasteht. Wenn insbesondere die höhere Mathematik dieses wirklich hohe Ziel erreicht haben wird, dann wird sie ihr Prädicat, das man jetzt noch eher der alten Geometrie beilegen könnte, wirklich verdienen.

Ich will nun, um die obigen Vorschläge in Betreff der Ansicht der Principien und des Vortrages der Geometrie deutlicher zu machen, als Beispiel, von dem ersten Haupttheile, oder von den Elementen der Geometrie (der Lehre von gera-

den Linien und Flächen) ein Stück des erste
schnitts der ersten Unterabtheilung im Zusa
hange herzusetzen versuchen, was aber nichts
ter seyn wird als ein erster Versuch, al
Bruchstück eines Gegenstandes, den nach den
gen Entwurfe, mit einer seiner Würde und
angemessenen Genauigkeit durchzuarbeiten,
gehören.

der Geometrie

und des

ersten Haupttheils

n geraden Linien und Flächen, oder von den
t umschlossenen Figuren in der Ebene und
von den Körpern:

Abschnitt. Von den durch gerade Linien
grenzten Figuren in der Ebene.

Inhalt des Bruchstücks.

tung. Vom Raume in der Geometrie
erhaupt.
on der geraden Linie.
Von den geradlinigen Figuren in der Ebene,
ie nicht überall begrenzt sind.
Von den Parallel-Räumen.
Von den Winkeln.
. Vom Winkel überhaupt.
. Von den Winkeln zwischen zwei geraden
Linien.

α. Von den Nebenwinkeln.

β. Von den Scheitelwinkeln.

c, Von den Winkeln zwischen drei g
Linien.

III. Von den begrenzten geradelinigen F
in der Ebene, und zwar

A. Von den Figuren in Absicht der Größ
Gestalt zugleich.

a. Von den Dreiecken.

So weit das Bruchstück.

Einleitung.

I. Vorstellung heißt, was die Dinge dem Verstande sind.

II. Urtheil heißt, wodurch die Vernunft Vorstellungen verbindet.

III. Erste Vorstellung heißt, die auf keine andere sich beziehet.

IV. Erstes Urtheil heißt, das auf kein anderes sich beziehet.

V. Satz ist der Ausdruck von Vorstellungen oder Urtheilen.

VI. Grundsatz ist der Ausdruck eines ersten Urtheils oder einer ersten Vorstellung.

VII. Lehrsatz ist der Ausdruck verbundener Vorstellungen und Urtheile.

VIII. Beweis ist das Zurückführen eines Satzes auf Grundsätze.

IX. Folgerung ist das Fortführen einer Vorstellung oder eines Urtheils auf neue.

X. Erläuterung ist der Ausdruck einer Vorstellung durch erste oder schon erklärte Vorstellungen.

XI. Erläuterung ist eine mit Folgerungen und Beweisen verbundene Erklärung.

XII. Zusatz ist der besondere Ausdruck eines Satzes, der in einem oder mehreren Lehrsätzen enthalten ist.

XIII. Anmerkung ist die besondere Erklärung dieses oder jenes Umstandes in einem Satze.

XIV. Erste Vorstellungen für die Geometrie sind Raum, Ort, Lage, Menge.

Von dem Gegenstande der Mathematik überhaupt und der Geometrie insbesondere.

Erklärung.

XV. Was vermehrt oder vermindert werden kann, heißt Größe. Die Wissenschaft von der Größe heißt Mathematik.

Erklärung.

XVI. Eine Größe heißt einer andern gleich, wenn sie in nichts von ihr verschieden ist.

Erläuterung.

XVII. Größen können getheilt und zusammengesetzt werden, weil sie vermehrt und vermindert werden können.

Erklärung.

XVIII. Eine Größe heißt kleiner als eine andere, wenn sie von letzterer ein Theil ist oder seyn könnte. Letztere heißt größer als die erste.

Erklärung.

XIX. Wenn eine Größe in zwei gleiche Theile getheilt wird, so heißen diese Theile Hälften.

Erklärung.

XX. Es giebt zweierlei Arten von Größen. Bei der einen entsteht der Theil aus dem Ganzen durch Theilung, bei der andern entsteht das Ganze aus den Theilen durch Zusammensetzung. Die erste Art von Größen heißt stetig, die zweite unstetig. Der Raum ist eine stetige, die Zahl eine unstetige Größe.

Erklärung.

XXI. Die reine Mathematik zerfällt, nach den zwei Arten der Größe, in zwei Haupttheile: in die Wissenschaft von der Zahl, und in die

Wissenschaft vom Raume. Erstere he
chenkunst (Calcul), letztere Meßkun
metrie). Der Gegenstand der Geome
also der Raum.

Grundsätze.

XXII. Jede Größe ist sich selbst gleich.

XXIII. Wenn zwei Größen ein und de
dritten Größe gleich sind, so sind si
einander gleich.

XXIV. Wenn von zwei Theilen einer Grö
eine größer ist als die Hälfte, so ist d
dere kleiner als die Hälfte und als d
dere Theil; und umgekehrt.

XXV. Das Ganze ist gleich den Theilen z
mengenommen.

XXVI. Gleiches zu Gleichem gethan und
hinweggenommen, giebt Gleiches, und U
ches zu Gleichem gethan, oder davon
weggenommen und umgekehrt, giebt
gleiches.

XXVII. Wenn mehrere Größen einzeln, g
oder kleiner oder eben so groß sind als eb
viel andere Größen, so ist auch die Su
der ersten Größen größer oder kleiner, al
Summe der andern, oder ihr gleich.

XXVIII. Eine Größe kann nur größer oder

als eine andere Größe seyn, oder ihr
ich.

a. Also ist eine Größe kleiner als eine andere, wenn sie weder größer noch ihr gleich ist.

b. Sie ist ihr gleich, wenn sie weder größer noch kleiner ist.

c. Sie ist größer als die andere, wenn sie weder ihr gleich noch kleiner ist.

Raume in der Geometrie überhaupt.

Erklärung.

Raum kann begrenzt oder ganz oder zum
il unbegrenzt seyn. Nur durch seine Gren
ist ein Raum von dem andern verschieden
zwischen denselben Grenzen liegt nur ein
derselbe Raum. Deshalb hat die Geo
ie insbesondere die Grenzen der Räume
Gegenstande.

Erklärung.

Raum unterscheidet sich von einem andern
Größe und Gestalt, die beide von den
zen bestimmt werden.

Erklärung nebst Folgerung.

3. I. a. Wenn die Grenzen zweier Räume überall in einander fallen würden, so haben die Räume beides, dieselbe Größe und Gestalt, und sind in nichts verschieden. Sie sind also alsdann einander gleich. *) Fallen die Grenzen nicht alle zusammen, so können die Räume nicht gleich seyn.

b. Ist gleich viel Raum in Grenzen von verschiedener Gestalt enthalten, so sagt man, die Räume sind gleich groß. Ist die Menge des Raums verschieden, so können die Räume nicht gleich groß seyn.

c. Haben ungleiche Räume gleiche Gestalt, so sagt man, sie sind einander ähnlich. Ist die Gestalt verschieden, so können die Räume nicht ähnlich seyn.

II. a. Wenn zwei Räume einander gleich sind, so fallen ihre Grenzen überall einander; denn fielen die Grenzen nicht alle zusammen, so könnten die Räume nicht gleich groß seyn. (I. a.)

b. Wenn

*) Das Ineinanderfallen aller Grenzen zweier Figuren ist das wesentliche Kennzeichen der Gleichheit. In diesem Begriffe streng genommen, liegt Alles, worauf die Vergleichung unbegrenzter und begrenzter Räume beruhet.

b. Wenn zwei Räume gleich groß sind, so ist gleich viel Raum in ihren Grenzen enthalten; denn wären die Mengen des Raums verschieden, so könnten die Räume nicht gleich groß seyn (I. b.).

c. Wenn zwei Räume einander ähnlich sind, so haben sie gleiche Gestalten. Denn wären die Gestalten verschieden, so könnten die Räume nicht ähnlich seyn (I. c.).

Lehrsatz.

4. Ein begrenzter Raum kann einem ganz oder zum Theil unbegrenzten Raume nicht gleich seyn. Denn da dieser nicht überall Grenzen hat, in welche die des ersten fallen könnten, so können die Grenzen der beiden Räume nicht überall ineinander fallen, und folglich können die beiden Räume nicht gleich seyn (3. 1. a.).

Erklärung.

5. Ein nach allen Seiten ausgedehnter Raum heißt körperlicher Raum. Eine Grenze, in welcher ein körperlicher Raum an einen andern stößt, heißt Fläche. Eine Grenze, in welcher ein Flächenraum an einen andern stößt, heißt Linie. Eine Grenze, in welcher

ein Linienraum an einen andern stößt,
Punct *).

*) Hier lassen sich noch folgende Erläuterungen
schalten.

Erläuterung.

5. I. a. Die Fläche ist nicht in die körperlichen R
ausgedehnt, die sie sondert, weil diese körper
Räume, als Theile einer stetigen Größe ohne
schenraum aneinander liegen. Aber auch in
andern körperlichen Raum, weil sie an keinen
dern liegt. Die Fläche ist also überhaupt al
perlicher Raum nicht ausgedehnt.

b. Die Linie ist nicht in die Flächenräume ausged
die sie sondert, weil dieselben, als Theile einer
gen Größe, ohne Zwischenraum aneinander l
Aber auch in keine andere Fläche, weil sie son
Grenze seyn könnte zwischen zwei körperlichen
men, dergleichen die Flächenräume, deren Gren
ist, nicht seyn können (a.). Um so weniger in
körperlichen Raum, weil selbst die Flächen es
seyn können. Die Linie ist also überhaupt als
chen= oder als körperlicher Raum nicht ausgede

c. Der Punct ist nicht in die Linienräume ausged
die er sondert, weil dieselben, als Theile einer
gen Größe, ohne Zwischenraum aneinander li
Aber auch in keine andere Linie, weil er sonst
Grenze seyn könnte zwischen zwei Flächenräumen,
gleichen die Linienräume, die er sondert, nicht
können (a.). Um so weniger in einen Flächenr
weil selbst die Linien es nicht seyn können (a.).
Punct ist also überhaupt als Linien= Flächen=
körperlicher Raum nicht ausgedehnt.

Erläuterung.

5. II. a. In einer Linie sind zwar Puncte enth

Erläuterung.

6. Da der Punct nicht als Linien- Flächen- oder körperlicher Raum ausgedehnt ist, so ist er gar

weil man Linien, wie man will, theilen kann, was durch Puncte geschieht (5.). Nicht aber in einem Puncte Linien, weil ein Punct nicht in eine Linie ausgedehnt ist (5. I. c.).

b. In einer Fläche sind zwar Linien, und folglich Puncte enthalten, weil man die Fläche, wo man will, theilen kann, was durch Linien geschieht (5.), nicht aber in einer Linie oder in einem Puncte, Flächen, weil die Linie, und noch weniger der Punct, in eine Fläche ausgedehnt ist (5. I. b. c.).

c. In einem körperlichen Raume sind zwar Flächen, und folglich Linien und Puncte enthalten, weil man den körperlichen Raum, wo man will, theilen kann, was durch Flächen geschieht (5.). Nicht aber in einer Fläche, oder in Linien und Puncten, körperliche Räume, weil die Fläche und noch weniger die Linie und der Punct in einen körperlichen Raum ausgedehnt ist (5. I. a. b. c.).

Erläuterung.

5. III. a. Wo eine Fläche ist, sind auch körperliche Räume, die sie sondert, weil die Grenze nicht da ist ohne das Begrenzte.

b. Wo eine Linie ist, sind auch Flächenräume, die sie sondert, und folglich körperliche Räume, die von letztern getheilt werden, aus dem nemlichen Grunde.

c. Wo ein Punct ist, sind auch Linien-Räume, die er sondert, und folglich Flächen-Räume, die jene, und körperliche Räume, die diese theilen, aus dem nemlichen Grunde.

nicht ausgedehnt *). Der Punct ist al
Untheilbare. Er ist kein Raum, sonder
ein Ort im Raume.

Erläuterung.

7. Da ein Punct kein Raum ist (6.) und f
keine Grenzen hat, so unterscheidet sich ein
durch nichts von einem andern Puncte (1.

Lehrsatz.

8. Da im Raume, durch denselben P
nach allen Richtungen Linien liegen
nen **), so bestimmen ein einzelner,
was dasselbe ist, weniger als zwei P
te keine Linie. Also kann eine Linie
in eine andere fallen, wenn beide
wenigstens zwei Puncte gemein ha

Erklärung.

9. Eine Linie unterscheidet sich von der a

*) Seine Ausdehnung nemlich würde sich theile
sen durch Grenzen, die Flächen, Linien oder P
sind. Wo aber auch nur ein Punct ist, sind d
nienräume, die er sondert, die Flächenräume
diese, und die körperlichen Räume die letztere
len (5. III. c.). Nun sind aber alle dergleichen
me in einem Puncte nicht enthalten (5. II.), a
der Punct gar nicht ausgedehnt.

**) Weil ein Punct zugleich mit den Linienrä
die er sondert, da ist (5. III. c.).

h ihre Gestalt. Daher giebt es unzählige
hiedene Linien. Man unterscheidet gerade
krumme. Eine gerade Linie ist, die je an
entgegengesetzten Seiten dieselbe Gestalt hat,
aß wenn man die eine Seite der Linie in
ndere, das heißt den Flächenraum an der
Seite in den Flächenraum an der andern
die Grenzen beider Räume an demselben
im Raume bleiben *). Eine krumme Linie
on der kein Theil gerade.

Lehrsatz.

im Raume, durch dieselbe Linie un-
ge Flächen liegen können **), so be-
en eine einzelne Linie, oder minde-
wei Puncte (8.), also weniger als
uncte, keine Fläche; also kann eine
nicht in eine andere fallen, wenn
nicht wenigstens drei Puncte ge-
aben.

Erklärung der geraden Linie ist wieder eine
he Hauptsache für alles Folgende. Sie ist,
ch, genau; denn der Begriff von Seite ist
ursprünglich, wie der von Gestalt und Lage.
er Seite nicht etwa ein Theil der Linie,
Grenze der Länge nach, sondern Lage ver-
rd, darf nicht erinnert werden.
ie Linie zugleich mit den Flächenräumen,

Erklärung.

11. Eine Fläche unterscheidet sich von der a
durch ihre Gestalt; daher giebt es unz
verschiedene Flächen. Man unterscheide
rade und krumme. Erstere heißen Eb
Eine Ebene ist, die an beiden Seiten d
Gestalt hat, so, daß wenn man die eine
der Ebene in die andere, das heißt den k
lichen Raum an der einen Seite in den k
lichen Raum an der andern, und umg
legt, die Grenzen des Raums in demselben
im Raume bleiben *). Eine krumme Fläc
von der kein Theil eben.

Erläuterung.

12. In einer Ebene sind also nach allen Ri
gen gerade Linien möglich, die ganz in der
bleiben, weil alle Linien in einer Ebene,
der Ebene selbst, an beiden Seiten dieselb
stalt haben.

Erklärung.

13. Jeder geometrische Raum heißt Figur.

*) Hier findet eine ähnliche Bemerkung statt,
bei (9.).

I.

Von der geraden Linie.

Lehrsatz 1.

14. Eine unbegrenzte gerade Linie theilt einen unbegrenzten Ebenen-Raum, in welchem sie sich befindet, in zwei gleiche Theile.

Beweis. Denn da die Linie an beiden Seiten von einerlei Gestalt ist (9.), so findet keine Verschiedenheit in den Grenzen der Räume an beiden Seiten statt, folglich sind diese Räume einander gleich (3. I.).

Lehrsatz 2.

15. Zwischen zwei Puncten ist nur eine gerade Linie möglich.

Fig. 1. Z. B. zwischen A und B ist nur die eine gerade Linie AB möglich.

Beweis. Denn es sey ACB eine zweite Linie zwischen A und B, die von AB verschieden ist, so wird diese Linie, wenn man die Seite M in die Seite N legt, mit ihr in eine Lage ADB kommen, die einen andern Ort im Raume einnimmt als ACB, weil AB angenommenermaßen eine gerade Linie ist, und also die Eigenschaft hat, an demselben Orte zu bleiben, wenn man die

Seite M in die Seite N legt (9.), zwischen AB und ACB aber der Raum ACB liegt. Also ist die Linie ACB keine gerade Linie. Und da dasselbe von jeder andern Linie gilt, die außerhalb AB liegt, so ist außer AB, zwischen A und B, keine zweite gerade Linie möglich.

Lehrsatz 3.

16. Wenn zwei gerade Linien zwei Puncte gemein haben, so fallen sie ihrer ganzen Ausdehnung nach in einander.

Fig. 2. Z. B. Wenn zwei gerade Linien die beiden Puncte A und B gemein haben, so fallen sie ganz in einander.

Beweis. Denn es sey, wenn es möglich, EAFBG eine zweite gerade Linie, die von der geraden Linie CABD verschieden ist, aber die beiden Puncte A und B mit ihr gemein hat, so wird, wenn man die Seite M in die Seite N legt, die Linie EAFBG mit ihr in eine Lage HAIBK kommen, die einen andern Ort im Raume einnimmt, als EAFBG, weil CABD angenommenermaßen eine gerade Linie ist und also die Eigenschaft hat, an demselben Orte zu bleiben, wenn man die Seite M in die Seite N legt (9.), zwischen ABCD und EAFBG aber der Raum EAFBGDC liegt. Also ist die Linie EAFBG keine gerade Linie. Und da

e von jeder andern Linie gilt, die außerhalb
D liegt, so ist außer CABD, durch A und
ne andere gerade Linie möglich; mithin fallen
gerade Linien, die nur zwei Puncte wie A
gemein haben, in ihrer ganzen Ausdehnung
nder.

Lehrsatz 4.

wei gerade Linien können einander
in einem Puncte schneiden.

Z. B. Die beiden geraden Linien AB und
DE können einander nur in C schneiden.

eweis. Denn man setze, sie könnten noch
n zweiten Puncte F sich schneiden, so daß
die AB schneidende gerade Linie wäre, so
die beiden geraden Linien, weil sie jetzt
ncte F und C gemein haben, in ihrer gan-
dehnung in einander fallen (16.). Also
Puncte wie D und E u. s. w. in die Linie
en. Da nun solches wider die Voraus-
st, so ist es unmöglich, daß zwei gerade
ch nur in zweien, also überhaupt in mehr
Puncte sich schneiden.

Lehrsatz 5.

gerade Linie kann von der einen

nach der entgegengesetzten Seite
men, ohne sie zu schneiden.

Beweis. Denn die beiden Theile, in
eine gerade Linie den unbegrenzten Ebenen-
theilt, sind durch sie gänzlich von einander g
den und hängen nirgends zusammen, weil d
rade Linie ohne Ende und stetig ist, worau
Satz folgt

Lehrsatz 6.

19. Wenn eine gerade Linie von einer
dern geschnitten wird, so bleibt sie
Durchschnittspuncte ab, in ihrer
zen Ausdehnung, nach einer und der
dern Seite hin, auf derselben Seite
geschnittenen Linie.

Beweis. Denn sie kann auf die an
Seite nicht kommen, ohne die geschnittene
noch einmal, also zum zweitenmale zu schne
(18.), was aber nach (17.) unmöglich ist.

Erklärung.

20. Gerade Linien, die einander in ihrer gan
Ausdehnung nicht begegnen, heißen Parall
Linien. Gerade Linien, die einander begegn
heißen Nicht-Parallelen.

Lehrsatz 7.

21. Gerade Linien, die mit einer ande

zwischen ihnen parallel sind, sind auch mit einander parallel.

Fig. 4. Z. B. Wenn AB und EF mit CD parallel sind, so ist auch AB mit EF parallel.

Beweis. Denn man setze, AB und EF wären nicht parallel, sondern begegneten sich irgendwo, so könnte dies nur in- oder außerhalb der Linie CD geschehen. In der Linie CD aber können die Linien sich nicht begegnen, weil sie sonst CD selbst begegnen würden, welches wider die Voraussetzung ist, da AB und EF mit CD parallel seyn sollen. Aber auch außerhalb CD können sie sich nicht begegnen. Denn man setze, sie begegneten sich irgendwo in G, so müßte eine der Linien, hier AB, von einer Seite von CD nach der andern kommen, welches nicht angeht, ohne CD zu schneiden (18.). Da nun dieses ebenfalls gegen die Voraussetzung ist, indem AB und EF der Linie CD nicht begegnen sollen, so können sich die Linien AB und EF gar nicht begegnen, und sind folglich mit einander parallel.

II.

Von den geradelinigen Figuren in der Ebene, die nicht völlig begrenzt sind.

A. Von den Parallel-Räumen.

Erklärung.

22. Der zum Theil unbegrenzte Raum, welcher zwischen zwei Parallelen (20.) liegt, soll Parallel-Raum heißen.

Fig. 5. Z. B. Wenn AB und CD Parallelen sind, so soll ABCD Parallel-Raum heißen.

Lehrsatz 1.

23. Wenn man zwei oder mehrere, und so viel Parallel-Räume als man will, an einander fügt, so entsteht wieder ein Parallel-Raum.

Fig. 6. Z. B. Wenn ABCD, CDEF, EFGH u. s. w. Parallel-Räume sind, so sind ABEF, ABGH u. s. w. ebenfalls Parallel-Räume.

Beweis. Denn fügt man den Parallel-Raum CDEF an den Parallel-Raum ABCD, so sind, weil AB und EF beide mit CD parallel seyn sollen, AB und EF auch mit einander parallel (21.). Also ist auch der ganze Raum ABEF

ein Parallel-Raum. Fügt man einen zweiten Parallel-Raum EFGH an, so gilt von ABEF und EFGH, was von ABCD und CDEF gesagt worden; also ist auch ABGH ein Parallel-Raum und so weiter.

Lehrsatz 2.

24. Durch Aneinanderfügen von Parallel-Räumen kann der ganze unbegrenzte Raum nicht ausgefüllt werden.

Beweis. Denn da Parallel-Räume, so viel man will, aneinander gefügt, wieder einen Parallel-Raum geben (23.) außerhalb eines Parallel-Raumes, auf der andern Seite der ihn begrenzenden geraden Linien aber, noch vom unbegrenzten Raume liegt; so kann mit Parallel-Räumen, die aneinander gefügt werden, der ganze Raum nicht ausgefüllt werden.

B. Von den Winkeln.

a) Vom Winkel überhaupt.

Erklärung.

25. Der zum Theil unbegrenzte Raum, welcher zwischen zwei Nicht-Parallelen, d. h. von einer bis zur andern liegt, heißt Winkel. Die

Nicht-Parallelen, so weit sie den Winkel
zen, also vom Durchschnitts-Punct ab,
des Winkels **Schenkel**. Der Durchsc
Punct heißt des Winkels **Scheitel**.

Fig. 7. Z. B. Wenn AC und BC nicht p
sind, so heißen die Räume ACB, n
M oder N, die von AC bis BC liegen, Wi

Lehrsatz 1.

26 I. **Wenn die Schenkel zweier W in einander fallen, so fallen auch Scheitel in einander, und die Wi sind einander gleich.**

Beweis. Denn da zwei gerade Linien in einem Puncte sich schneiden können (17.) fallen die Durchschnitts-Puncte gerader Linien sich schneiden, zusammen, wenn die Linien zu men fallen, folglich die Scheitel zweier Wi wenn ihre Schenkel zusammen fallen, welches Erste war. Nun hat der Winkel außer den S keln keine Grenzen, also fallen **alle** Grenzen sammen, wenn die Schenkel in einander fa folglich sind in solchem Falle die Winkel eina gleich (3. I. a.), welches das Andere war.

II. **Wenn zwei Winkel einander gleich s und der Scheitel und ein Schenkel f len in einander, so fallen auch die dern Schenkel in einander.**

eweis. Denn da alle Grenzen der beiden
zusammen fallen müssen, wenn die Winkel
ind (3. II. a.) und die andern Schenkel zu
enzen gehören, so müssen auch sie zusam-
llen.

Lehrsatz 2.

der Winkel ist ein gewisser Theil
unbegrenzten Ebenen-Raums, und
h Aneinanderfügen von Winkeln
cher Größe, kann der ganze Ebenen-
m entweder genau, oder so weit
gefüllt werden, daß weniger übrig
bt als der einfache Winkel.

Beweis. Eine gerade Linie AB theilt
den ganzen Ebenen-Raum in zwei gleiche
(14.). Eine sie schneidende gerade Linie
ie so, daß wenn man den Raum an der
l in den Raum an der Seite N legt, die
findliche gerade Linie AC in die gerade
C fällt, so wird der Winkel ACD dem
BCD gleich, und folglich jeder dieser bei-
kel die Hälfte von der Hälfte des ganzen
Raums seyn. Es liege ferner CE so, daß
n CE in CB legte, CD in CE fiele, so
CE = ECB, also DCE wiederum die
on DCB, oder der achte Theil des gan-
n-Raums seyn. — So kann man das

Halbiren des Winkels ACD oder BCD fo
so weit man will, also auf einen Winkel ko
der kleiner ist als jeder, also auch kleiner a
gegebene. Nun ist der Winkel, auf den man
Theilung kommt, ein gewisser Theil des g
Ebenen-Raums, also ist es auch um so meh
größere gegebene, welches das Erste war.
ferner überhaupt ein Winkel ein Theil des g
Ebenen-Raums ist, so wird man durch An
dersetzen gleicher Winkel so viel als man will
ganzen Ebenen-Raum ausfüllen können, so
so viel, daß, was noch übrig ist, nicht me
viel beträgt als der einfache Winkel, welches
Andere war.

Lehrsatz 3.

28. Jeder Parallel-Raum ist kleiner
ein Winkel.

Beweis. Denn man vervielfältige den W
kel so oft, daß vom ganzen Ebenen-Raum n
mehr so viel übrig bleibt, als der einfache Wi
beträgt, was allemal möglich ist (27.), desglei
den Parallel-Raum eben so oft und noch ein
mehr; so müßte, wenn der Winkel in dem Pa
lel-Raume enthalten wäre, der ganze Ebenen-Ra
um so mehr in dem Parallel-Raume, den die le
Vervielfältigung giebt (23.), enthalten seyn. D
ses aber ist nicht der Fall, vielmehr kann der ga

Eben

n-Raum mit Parallel-Räumen nicht ausge-
werden (24.), also ist kein Winkel in einem
el-Raume enthalten.

Zusatz.

29. Wenn man also den einen Schenkel
CB eines Winkels ACB in die eine Grenze
nes Parallel-Raumes EFDB legt, so muß
dere Schenkel CA des Winkels die andere
EF des Parallel-Raums nothwendig über-
n und schneiden, weil der Winkel in dem
l-Raume nicht enthalten ist (28.).

Lehrsatz 4.

eder ganz begrenzte Raum ist klei-
als ein Winkel.

eweis. Denn gesetzt, es sey nicht so, so
wenn man erstlich den Winkel so oft ver-
gte, daß entweder der ganze unbegrenzte
ausgefüllt würde, oder daß, was übrig
weniger betrüge als der einfache Winkel;
ann den begrenzten Raum, der mit dem
verglichen werden soll, eben so oft und
mal mehr vervielfältigte, nemlich densel-
weder an einander, oder auch von einander
, im unbegrenzten Ebenen-Raum sich vor-
er vervielfältigte begrenzte Raum größer
der ganze unbegrenzte Ebenen-Raum.

Dieses aber ist nicht der Fall, vielmehr bleibt, so groß auch der begrenzte Raum seyn, und so oft man ihn auch vervielfältigen mag, noch immer vom begrenzten Raume außerhalb der Grenzen übrig.

b. Von den Winkeln zwischen zwei geraden Linien.

Erklärung.

31. Von den vier Winkeln zwischen zwei geraden Linien, um ihren Durchschnitts-Punct, welche paarweise entweder an einander oder einander gegenüber liegen, soll

α. jedes Paar an einander liegender Winkel Neben-Winkel,

β. jedes Paar einander gegenüber liegender Winkel Scheitel-Winkel heißen.

Fig. 10. Z. B. a und b, b und d sind Neben-Winkel; c und b, a und d sind Scheitel-Winkel.

α. Von den Neben-Winkeln.

Lehrsatz 1.

32. I. Neben-Winkel zusammen sind einander gleich.

Beweis. Denn sie füllen zusammen den Raum an einer Seite einer geraden Linie (31.),

ieser Raum ist immer derselbe, nemlich die
eines und desselben Raums, des ganzen
enzten Ebenen-Raums (14.).

inkel die zusammen Neben-Win-
gleich sind, und die, wie Neben-
kel, den Scheitel und einen Schen-
gemein haben, füllen auch, wie Ne-
-Winkel, den Raum an einer Seite
r geraden Linie.

eweis. Denn die Grenzen gleicher Räume
usammen (3. II. a.) und die Grenze von
Winkeln ist eine gerade Linie (I.).

Erklärung.

iche Neben-Winkel heißen rechte Winkel.
erade Linie zwischen ihnen heißt Perpen-
auf die andere, welche die Grenze der
e der Winkel ist, und Grund-Linie
erpendikels heißt.

. B. Wenn ACB und BCD Neben-
Winkel und gleich groß sind, so heißen
BCD rechte Winkel, BC Perpendikel
und AD des Perpendikels Grund-Linie.

Erklärung.

Größe des rechten Winkels, die eine ab-
, weil sie die Hälfte des Ebenen-Raums

an einer Seite einer geraden Linie, und so
den vierten Theil des ganzen unbegrenzten
nen-Raums ausmacht, nimmt man zum Maa
ler Winkel an. Diese Größe soll immer durc
Buchstaben ϛ bezeichnet werden. Neben-W
betragen also zusammen immer 2 ϛ.

Zusatz.

35. Also ist die Summe beliebiger W
um einen Punct, wenn sie den Raum an
Seite einer geraden Linie füllen, = 2 ϛ, und
sie den ganzen unbegrenzten Ebenen-Raum
len, = 4 ϛ.

β. Von den Scheitel-Winkeln.

Lehrsatz.

36. I. **Scheitel-Winkel sind einan gleich.**

Fig. 10. Z. B. c = b.

Beweis. Denn beide Winkel c und b
ein und demselben, zwischen ihnen liegenden
kel a gethan, machen Neben-Winkel aus, die
sammen gleich sind (32. I.), also sind sie ei
der gleich (XXVI.).

II. **Gleiche Winkel, die, wie Schei Winkel, den Scheitel gemein, und ei**

henkel zu beiden Seiten desselben in
ader Linie haben, haben auch, wie
heitel-Winkel, den andern Schenkel
n so.

. B. Wenn DCE = ACB und ACE eine
Linie ist, so ist auch DCB eine gerade Linie.

eweis. Denn der eine Winkel c, mit dem
n beiden liegenden Winkel a zusammen, sind
-Winkel, weil sie an einer geraden Linie lie-
Nun soll b = c seyn, also sind auch a und
en-Winkel, und folglich ist auch DCB eine
Linie (32. II.).

n den Winkeln zwischen drei geraden
Linien.

Erklärung.

on drei geraden Linien, die sich schneiden,
diejenige, die von den beiden übrigen ge-
ten wird, Grund-Linie, die andern bei-
ollen Schenkel heißen. Um die beiden
schnitts-Puncte in der Grund-Linie entste-
cht Winkel. Diejenigen, welche zwischen
einzelnen Paare von Linien liegen, sind
abgehandelt. Es bleiben also noch die
l um die Durchschnitts-Puncte übrig, die
n verschiedenen Paaren von Linien lie-
Man unterscheidet unter denselben

Fig. 12. I. Die Winkel-Paare, die an ähnlichen Seiten der Schenkel, und entweder an derselben Seite der Grundlinie liegen, wie a und α, b und β, c und γ, d und δ, oder an entgegengesetzten Seiten wie a und γ, b und δ, c und α, d und β. Erstere sollen Neigungs-Winkel, letztere Seiten-Winkel heißen.

II. Die Winkel-Paare, die an entgegengesetzten, entweder einander zugekehrten, oder von einander abgekehrten Seiten der Schenkel, aber an derselben Seite der Grundlinie liegen, wie b und α, d und γ, und a und β, c und δ. Sie sollen Gegen-Winkel, und zwar erstere innere, letztere äußere heißen.

III. Die Winkel-Paare, die an entgegengesetzten Seiten der Grundlinie und an entgegengesetzten, entweder einander zugekehrten, oder von einander abgekehrten, Seiten der Schenkel liegen, wie b und γ, d und α, und a und δ, c und β. Sie sollen Wechsels-Winkel, und zwar erstere innere und letztere äußere heißen.

Lehrsatz I.

38. I. (a.) Zwischen Schenkeln die sich schneiden sind die Neigungs- und Wechsels-Winkel an der Grundlinie ungleich, die Gegen- und Seiten-Win-

aber betragen zusammen nicht zwei
te, sondern weniger oder mehr, und
r liegt an derjenigen Seite der
ndlinie, an welcher sich die Schen-
schneiden, von den Neigungs-Win-
der kleinere nach innen, von den
rn Wechsels-Winkeln liegt an die-
Seite der kleinere, von den äußern
größere. Von den Gegen-Winkeln
agen an der nemlichen Seite die in-
weniger, die äußern mehr als zwei
e, und von denjenigen Seiten-
eln, die weniger als zwei rechte
gen, ist der, welcher an dieser
liegt, der innere, von den an-
Seiten-Winkeln ist es der äußere.

3. B. Wenn die Schenkel sich an der
Seite M schneiden, so ist

$\alpha < a$, $b < \gamma$, $a > \delta$

$< 2\varrho$, $a + \beta > 2\varrho$

$< 2\varrho$, $a + \gamma > 2\varrho$, $\beta + d > 2\varrho$

eweis. Denn der innere Neigungs-
Winkel b z. B. ist um den begrenzten
BC größer, um den Winkel DAE aber
der äußere Neigungs-Winkel β. Nun
egrenzte Raum kleiner als ein Winkel
ist $b < \beta$.

Fig. 12. Ferner sind (Fig. 12.) $\beta = \gamma$, als Scheitel-Winkel, also ist mit $b < \beta$ zugleich $b < \gamma$. Sodann sind $\beta + \alpha = 2\varrho$ und $a + b = 2\varrho$ als Neben-Winkel, also ist $b + \alpha = a + b$, folglich, weil $b < \beta$ war, $a > \alpha$, und da $\alpha = \delta$, auch $a > \delta$. Sodann ist, wegen $\beta + \alpha = 2\varrho$, und $b < \beta$, $b + \alpha < 2\varrho$, folglich, da $a + b + \alpha + \beta = 4\varrho$, auch $a + \beta > 2\varrho$, und wegen der Gleichheit der Scheitel-Winkel, auch $\alpha + c < 2\varrho$, $a + \gamma > 2\varrho$, $\beta + d > 2\varrho$.

b. Wenn Neigungs- und Wechsels-Winkel gleich sind oder Gegen- und Seiten Winkel zwei rechte betragen; so sind die Schenkel parallel.

Beweis. Denn wären sie nicht parallel, sondern schnitten sich, so würden nach (a.) die Neigungs- und Wechsels-Winkel ungleich seyn, und die Gegen- und Seiten-Winkel nicht zwei rechte betragen; wider die Voraussetzung.

II. a. Wenn Neigungs- und Wechsels-Winkel an der Grundlinie ungleich sind, oder Gegen- und Seiten-Winkel nicht zwei rechte betragen, so schneiden sich die Schenkel, genugsam verlängert, nothwendig, und zwar an derjenigen Seite der Grundlinie, an welcher von

Neigungs-Winkeln der innere der
iere, oder an welcher von den in-
Wechsels-Winkeln der kleinere,
den äußern der größere liegt; an
her die innern Gegen-Winkel we-
r, die äußern mehr als zwei rechte
agen, oder an welcher von denjeni-
Seiten-Winkeln, die weniger als
rechte betragen, der innere, von
enigen, die mehr betragen, der
ere liegt.

z. B. Wenn

$\mathfrak{b} < \beta$ oder $\alpha < a$, $b < \gamma$, $a > \delta$

$< 2\varrho$, $a + \beta > 2\varrho$, $b + \delta < 2\varrho$, $\alpha + c > 2\varrho$

$a + \gamma > 2\varrho$, $\beta + d > 2\varrho$

schneiden sich die Schenkel an der Seite
wendig.

Beweis. Denn wenn z. B. $b < \beta$, so
F = b, so daß DBE der Unterschied der
b und β ist. Nun ist BE mit AC pa-
. b.), also ist CABE ein Parallel-Raum
nd der Winkel DBE fällt, von BE nach
innerhalb dieses Parallel-Raums. In-
eines Parallel-Raums aber ist kein Win-
alten (28.), sondern DB muß die CA
dig schneiden (29.). Die Schenkel schnei-

den sich also nothwendig, und zwar an der Seite der Grundlinie, an welcher $b < \beta$ ist gleich mit $b < \beta$ aber ist $\alpha < a$ u. s. w. (I a.) bewiesen wurde *).

b. **Zwischen parallelen Schenkeln die Neigungs- und Wechsels-W gleich, und die Gegen- und Seiten- kel-Paare so groß als zwei rechte.**

Beweis. Denn wären die Neigungs Wechsels-Winkel nicht gleich, oder betrügen Gegen- und Seiten-Winkel nicht zwei recht würden nach (II. a.) die Schenkel sich schne wider die Voraussetzung **).

*) Dieser Beweis wäre nun derjenige, der sich, nach den obigen Begriffen von Winkel- und P lel-Räumen, für das eilfte euclidische Axiom g läßt, wie es scheint, mit aller der Strenge, die weisen für geometrische Sätze zukommt, und die die andern Sätze wirklich statt findet. Wider Zusammenhang der Sätze bis zu dem Gegenw gen ist, so viel ich einsehe, nichts auszusetzen.

Fig. * **) Hier läßt sich ein Einwand machen, der Vorstellung von unbegrenzten Winkel-Räumen bes ders anzugreifen scheint. Wenn nemlich z. B. in
Fig. * AB und DC Parallelen sind, so soll, wie bewies der Winkel β dem Winkel δ, also der Raum A dem Raume DCE gleich seyn. Gleichwohl zeigt Augenschein, daß der Raum ABE um den Ra ABDC größer ist als der Raum CDE. Hier a

Lehrsatz 2.

Winkel an ähnlichen und an ent-
ngesetzten Seiten von Parallelen
einander gleich.

nt ein Widerspruch zu seyn. Allein es ist nicht
Die Winkel-Räume δ und β sind nemlich den-
vollkommen gleich, wenn man den obigen Be-
von Gleichheit: daß zwei Raum-Größen gleich
wenn alle ihre Grenzen, so viel sie
n haben, in einander fallen, strenge fest
Denn es kommt, diesem Begriffe zufolge, nur
uf an, daß AB und CD in einander fallen kön-
wenn man B in D und BE in DE legt, und
daß dieses geschehen könne, daran hindert der
i ABCD, der einen scheinbaren Unterschied her-
ingt, nicht, denn die unbegrenzten geraden Li-
DE und BE fallen ganz in einander, wenn man
B legt, obgleich BE um BD länger ist als DE.
er That liegt in dem genauen Auffassen des
fs von Gleichheit, wie es scheint, die Lösung
Schwierigkeiten. Der Fall hier zeigt, daß zwei
e, zum Theil noch unbegrenzte, Raum-Grö-
gar an Größe (scheinbar) verschieden seyn können.
bei ganz begrenzten Räumen die Grenzen alle in
er fallen, so sind die Räume freilich zu gleicher
leich groß; weil zwischen einerlei bestimmten
n nur einerlei bestimmter Raum liegt. Der
der Gleichheit schließt bei ganz begrenzten
n die Bedingung der Gleichheit der Menge
renzten Raums ein; allein letztere ist nicht
rt allgemeine Bedingung für erstere, wie
ige Fall an zum Theil unbegrenzten Räu-
gt.

Fig. 15. Z. B. Wenn AD und EH, IK un
Parallelen sind, so ist z. B. $\alpha =$
$\alpha = \gamma$.

Beweis. Denn $\alpha = \delta = \beta$ (38. II. b.)
und $\varepsilon = \alpha = \gamma$
also $\alpha = \beta$ und $\alpha = \gamma$

II. Wenn ein Schenkel eines Win
mit einem Schenkel eines andern
kels parallel ist, und die Winkel li
an ähnlichen oder an entgegengese
Seiten ihrer Schenkel, und sind ei
der gleich; so sind auch die an
Schenkel parallel.

Z. B. Wenn LM und IK Parallelen
und es ist $\alpha = \beta$ und $\alpha = \gamma$, so sind auch
und EH Parallelen.

Beweis. Denn $\alpha = \tau$ (38. II. b.).
soll $\alpha = \beta$ oder $\alpha = \gamma$ seyn; also ist auch τ
und $\tau = \gamma$. Dieserhalb aber ist AD mit EH
rallel (38. I. b.)

Zusätze.

40. I. Also auch Perpendikel auf Paralle
wenn sie nicht zusammenfallen, begegnen sich
gend; denn sie sind die Schenkel an gleichen, n
lich rechten Neigungs-Winkeln, deren and
Schenkel parallel sind. (38. I. b.)

Desgleichen Perpendikel auf ein und die-
de Linie, durch verschiedene Puncte der-
gegnen sich nirgend; denn sie sind Schen-
leichen, nemlich rechten Neigungs-Win-
che parallel sind (38. I. b.).

Lehrsatz 3.

**einem Puncte giebt es nach ei-
raden Linie nur eine einzige ge-
Linie, die mit jener, an einer be-
ten Seite, einen bestimmten Win-
acht.**

. B. Es giebt nur eine gerade Linie AC
urch C, die mit AD, an der Seite M,
mten Winkel CAD macht.

eis. Denn gäbe es unter demselben
e zweite, von der ersten verschiedene ge-
CB durch C, die auch AD schnitte, so
ie Neigungs-Winkel CAD und CBD
sich schneidenden Linien AC und BC,
leich seyn, welches nicht der Fall ist
.

Zusatz.

Also giebt es von einem Puncte nach
den Linie auch nur ein einziges Per-
nemlich nur eine einzige gerade Linie,

die mit der Grundlinie einen rechten Winkel macht *).

*) Hier könnte noch folgender Satz folgen.

Lehrsatz.

42. I. Wenn von drei geraden Linien A, B und C keine mit der andern parallel ist, und sie nicht in einem und demselben Puncte sich schneiden sollen, so schneiden sie sich an drei verschiedenen Orten, deren je zwei in je einer der drei Linien liegen.

Fig. ** Beweis. Denn erstlich schneidet z. B. A die B, weil sie nicht parallel sind, und zwar nur in einem Puncte c (17.). Nun schneidet auch A die C, weil auch sie nicht parallel sind. Aber der zweite Durchschnitts-Punct b soll schon außer dem ersten fallen. Deshalb kann nunmehr B die C nicht mehr in demselben Puncte b schneiden, weil sonst B zwei Puncte, c und b, mit A gemein haben, und folglich mit A zusammen fallen würde (16.) wider die Voraussetzung. Gleichwohl muß B die C schneiden, weil sie nicht parallel sind; also muß B die C an einem von b verschiedenen Orte a der Linie C schneiden. Der Ort a fällt also nicht in den Ort b. Aber eben so wenig in den Ort c, weil sonst wiederum die Linien A und C zwei Puncte gemein haben, und folglich, gegen die Voraussetzung, zusammen fallen würden. Also kann keiner der drei Orte a, b und c in den andern fallen. Die Durchschnitts-Puncte liegen aber in den sich schneidenden Linien, und je zwei schneiden die dritte an zwei verschiedenen Orten; also liegen je zwei Durchschnitts-Puncte in jeder Linie.

Lehrsatz 4.

nn eine gerade Linie durch den
schnitts = Punct zweier andern,
ne vierte an zwei verschiedenen
schneiden, und zwischen ihnen
so schneidet sie die vierte zwi=
jenen Orten.

. B. BD, die zwischen BA und BC
urch B liegt, schneidet AC zwischen A
nd C.

eis. Denn da AB und AC sich schnei=
so ist $\beta + \gamma < 2 \varrho$ (38. I. a.). Da man
soll, so ist um so mehr $\varepsilon + \gamma < 2 \varrho$.
schneiden sich DB und AC an der nem=
e O von BC, an welcher sich AB und
den (38. II. a.). Eben so ist, weil BC
ich schneiden sollen, $\beta + \alpha < 2 \varrho$. Da
seyn soll, so ist auch $\delta + \alpha < 2 \varrho$.
den sich um so mehr DB und AC an
n Seite O von AB, an welcher sich
C schneiden. Mithin nothwendig zwi=
und CB. Also schneidet DB die AC
zwischen A und C.

III.

Von den begrenzten geradelini
Figuren in der Ebene.

Erklärung.

44. Ein von drei geraden Linien umschl
Raum heißt Dreieck. Ein von vier g
Linien umschlossener Raum Viereck u.
Ueberhaupt ein von geraden Linien umschl
Raum Vieleck. Die umschließenden g
Linien heißen, von einem Durchschnitts-
bis zum nächsten, des Vielecks Seiten.
Winkel, die zwischen je zwei sich schneid
Linien nach innen zu liegen, des Vi
Winkel.

A. Von der Vergleichung der Figur
Absicht der Größe und Gestalt zugl

α. Von den Dreiecken.

Lehrsatz 1.

45. Die drei Winkel in jedem Dre
betragen zusammen gleich viel,
zwar zwei rechte.

Fig. 18. Z. B. $\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho$

Beweis. Denn es sey DC mit AB p
lel, so sind die beiden Neigungs-Winkel β u

und die beiden innern Wechsels-Winkel α und δ einander gleich (38. II. b.), also ist $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \varepsilon + \gamma$. Aber die drei Winkel δ, ε und γ füllen den Raum auf einer Seite der geraden Linie BE, und sind also gleich zwei rechten (35.); folglich ist $\alpha + \beta + \gamma = 2\,\varrho$.

Zusätze.

46. I. Also betragen jede zwei Winkel eines Dreiecks weniger als zwei rechte, und zwar um so viel als der dritte ausmacht.

II. Also ist jeder Winkel eines Dreiecks kleiner als zwei rechte, und zwar um so viel als die beiden andern zusammen ausmachen.

III. Also kann kein Dreieck mehr als einen rechten, noch weniger mehr als einen stumpfen Winkel haben, weil für den dritten Winkel nichts übrig bleiben, oder gar fehlen würde.

IV. Also ist in einem Dreieck ein rechter, und noch mehr ein stumpfer Winkel der größte von den dreien.

V. Also beträgt in einem Dreiecke, in welchem zwei Winkel gleich groß sind, jeder von diesen Winkeln immer weniger als ein rechter, weil sie beide zusammen weniger als zwei rechte ausmachen (I.).

VI. Also ist der äußere Neben-Winkel zu

jedem Dreiecks-Winkel gleich den beiden
Dreiecks-Winkeln zusammen genommen, und
Fig. 19. lich größer als jeder von ihnen; denn
$= 2\varrho$ und $\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho$ (45.), also $\delta =$
folglich $\delta > \alpha$ und $\delta > \beta$.

VII. Also wenn in einem Dreieck zwei
kel so groß sind als in einem andern, so
auch der dritte. Denn der dritte Winkel i
Unterschied zwischen der Summe der gleichen
kel und 2ϱ (II.), also zwischen zwei gle
Größen.

Erklärung.

47. a. Ein Dreieck heißt rechtwinklig, w
einer seiner Winkel ein rechter ist; stum
winklig, wenn ein Winkel ein stumpfer
spitzwinklig, wenn kein Winkel ein rec
oder stumpfer ist, also alle drei spitz s
Beide letzte Arten zusammen heißen auch schi
winklig.

b. Ein Dreieck heißt ungleichseitig, wenn ke
Seite der andern gleich ist; gleichschenkl
wenn zwei Seiten einander gleich sind, u
gleichseitig, wenn alle drei Seiten einan
gleich sind.

Anmerkung.

48. Wenn von den 6 Stücken eines Dreiecks, d

ten und den drei Winkeln, diese oder
Stücke in einem Dreiecke so groß sind
nem andern, so können die beiden Drei-
nder gleich seyn. Die möglichen Fälle
hheit von drei Stücken aus den sechsen
ende:
nn drei Seiten;
enn zwei Seiten und ein Winkel, und
var:
er von den beiden Seiten eingeschlos-
sene Winkel;
iner der beiden anliegenden Winkel;
enn eine Seite und zwei Winkel, und
ar:
e zwischen den beiden Winkeln liegende
Seite;
ne der anliegenden Seiten;
nn die drei Winkel
ien Dreiecke so groß sind als in dem

vier Fällen I, II. a, III. a, und
zwei Dreiecke ohne Einschränkung
h. Im fünften Falle II. b. sind
mpfwinklige Dreiecke einander gleich,
ten Falle IV. gleichen sich Dreiecke
lt, nicht an Gestalt und Größe zu.
Ordnung des Vortrags der vier Fälle

einer uneingeschränkten Gleichheit, so wie e
des andern bedarf, ist folgende: II. a,
III. b. und I.

Lehrsatz 2.

Erster Fall der Gleichheit von Dre
(48. II. a.)

49. Zwei Dreiecke sind einander
wenn zwei Seiten und der einge
sene Winkel in dem einen so gro
als in dem andern.

Fig. 20. Z. B. △ ABC = △ $\alpha\beta\gamma$ wenn A
BC = $\beta\gamma$ und B = β.

Beweis. Denn man lege BC in β
B in β, so wird C in γ fallen, weil B
seyn soll. Ferner wird BA in $\beta\alpha$ fallen
B = β seyn soll (26. II.), und A in α
AB = $\alpha\beta$ seyn soll. Nun ist zwischen
Puncten nur eine gerade Linie möglich (15.
wird auch AC in $\alpha\gamma$ fallen, weil A in α,
fiel. Also fallen alle Grenzen der beiden D
in einander, und folglich sind die Dreiecke
der gleich (3. I. a.).

Lehrsatz 3.

Zweiter Fall der Gleichheit von Drei
(48. III. a.)

50. Zwei Dreiecke sind einander g

zwei Winkel und die dazwischen
nde Seite in dem einen so groß
als in dem andern.

3. B. $\triangle ABC = \triangle \alpha\beta\gamma$ wenn $BC = \beta\gamma$,
$B = \beta$ und $C = \gamma$.

weis. Denn man lege BC in $\beta\gamma$ und
n β, so wird C in γ fallen, weil $BC = \beta\gamma$
und ferner wird AB in $\alpha\beta$ und AC in
weil $B = \beta$, $C = \gamma$ seyn soll (26. II.).
nen zwei gerade Linien nur in einem
h schneiden (17.), also werden auch die
tts-Puncte A und α der Linien AB, AC,
$\alpha\gamma$ in einander fallen, weil die Linien
nander fallen. Mithin fallen alle Gren-
den Dreiecke in einander, und die Drei-
nander gleich (3. I. a.).

Lehrsatz 4.

all der Gleichheit von Dreiecken
(48. III. b.)

Dreiecke sind einander gleich,
vei Winkel und eine der anlie-
Seiten in dem einen so groß
in dem andern.

. Es ist $\triangle ABC = \triangle \alpha\beta\gamma$, wenn
β, $C = \gamma$ und $AC = \alpha\gamma$.

Dreiecke so groß sind als in einem andern,
es auch der dritte (46. VII.). Also i
A = α. Da aber jetzt A = α, C = γ un
= $\alpha\gamma$, so sind zwei Winkel und die dazwisch
gende Seite in dem einen Dreiecke so gr
in dem andern, also sind die beiden Dreie
ander gleich (50.).

Lehrsatz 5.

52. I. **In jedem Dreiecke liegen gl Winkeln gleiche Seiten gegenübe**

Fig. 21. Z. B. Wenn $\alpha = \beta$, so ist auc
= AC.

Beweis. Denn die gerade Linie A
bire den Winkel BAC, so, daß $\varepsilon = \tau$, so
den Dreiecken BAD und CAD zwei
kel und eine anliegende Seite in dem ei
groß als in dem andern, nemlich $\varepsilon = \tau$,
und AD = AD, also sind die Dreiecke ei
gleich (51.), und folglich ist auch AB = A

II. **In jedem Dreiecke liegen gleiche ten gleiche Winkel gegenüber.**

Fig. 21. Z. B. Wenn AB = AC, so ist
$\alpha = \beta$.

Beweis. Denn es halbire wiederu
gerade Linie AD den Winkel BAC, so, daß

in den Dreiecken BAD und CAD
en und der eingeschlossene Winkel in dem
groß als in dem andern, nemlich: AB
AD = AD und $\varepsilon = \tau$. Also sind die
reiecke einander gleich (49.), folglich ist

Zusatz.

Also sind die gleichen Winkel in einem
kligen Dreiecke immer kleiner als rechte,
gleiche Winkel sind, für welche diese
statt findet (46. V.).

Lehrsatz 6.

Fall der Gleichheit von Dreiecken
(48. I.)

Dreiecke sind einander gleich,
lle drei Seiten in dem einen so
nd als in dem andern.

B. Es ist $\triangle ABC = \triangle \alpha\beta\gamma$, wenn
$= \alpha\beta$, $AC = \alpha\gamma$, und $BC = \beta\gamma$.

Beweis. Denn wenn die Dreiecke
wären, so müßte z. B. ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$
, dessen Seiten so groß sind wie die
und das dennoch ABC nicht gleich
ge BC in $\beta\gamma$ und B in β, so wird
n, weil $BC = \beta\gamma$ seyn soll. Wäre
glich, daß $\alpha\beta\gamma$ nicht $= ABC$, so

müßte A nicht in α fallen können. In eine
chen Falle könnte A

I. entweder innerhalb $\alpha\beta\gamma$, oder

II. irgendwo in $\alpha\beta$ oder $\alpha\gamma$, oder

III. außerhalb $\alpha\beta\gamma$ an der nemlichen
von $\beta\gamma$, wo α liegt, oder

IV. außerhalb $\alpha\beta\gamma$ an der andern Sei
$\beta\gamma$ fallen.

Fig. 22. I. Für den ersten Fall falle A in
wäre $\alpha\beta = \varepsilon\beta$ und $\alpha\gamma = \varepsilon\gamma$, we
$= AB$, $\alpha\gamma = AC$ seyn soll, also wären $\alpha\beta$
$\alpha\gamma\varepsilon$ gleichschenklige Dreiecke, folglich würde
und $\nu = \psi$ (52. II.), also auch $\mu + \nu$ oder
$+ \psi$ seyn. Aber $\alpha < 2\varrho$ (46. II.), und da
so $\varepsilon < 2\varrho$ (46 II.), so ist wegen $\varepsilon + \varphi + \psi$
$\varphi + \psi > 2\varrho$. Also ist nicht $\alpha = \varphi + \psi$, fo
kann auch ε nicht in den angenommenen Ort fa

Fig. 22. II. Für den zweiten Fall falle A
so müßte $\beta\varepsilon = AB$ seyn, welches un
lich ist, weil $\alpha\beta = AB$ seyn soll.

Fig. 22. III. Für den dritten Fall falle A
so daß $\varepsilon\beta = AB = \alpha\beta$ und $\varepsilon\gamma =$
$= \alpha\gamma$, so wären $\varepsilon\beta\alpha$ und $\varepsilon\gamma\alpha$ wiederum g
schenklige Dreiecke, also wäre $\varphi = \mu$ und ν
Es ist aber $\varphi > \psi$ wie die Figur zeigt, also
$\mu > \psi$; ferner ist $\nu > \mu$ wie die Figur zeigt,

so mehr $\nu > \psi$, da schon $\mu > \psi$. Gleich-
l $\nu = \psi$ seyn, mithin kann wiederum der
A nicht in ε fallen.

IV. Für den vierten Fall falle A in ε,
so daß $AB = \beta\varepsilon$ und $AC = \varepsilon\gamma$, so wäre
Dreiecke $\alpha\beta\varepsilon$, $\alpha\beta = \beta\varepsilon$ und in dem Drei-
, $\alpha\gamma = \gamma\varepsilon$, also wäre $\mu = \varphi$ und $\nu = \psi$
), also auch $\mu + \nu = \varphi + \psi$ oder $\alpha = \varepsilon$.
ären in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma$ und $\beta\varepsilon\gamma$
eiten und der eingeschlossene Winkel in
en so groß als in dem andern, nemlich
, $\alpha\gamma = \varepsilon\gamma$ und $\alpha = \varepsilon$, also wären die
einander gleich (49.).

ist also zwar der vierte Fall möglich, daß
t A, wenn man BC in $\beta\gamma$ legt, außer
aber es ist so wenig, wie in den drei er-
en, also überhaupt nicht ein Dreieck mit
Seiten AB, AC und BC möglich, das
C gleich wäre.

Zweiter Beweis. Es ist zu beweisen,
aß jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$, welches die drei
s Dreiecks ABC hat, letzterem gleich sey.

lege $\beta\gamma$ in BC und β in B, so wird
allen, weil $\beta\gamma = BC$ seyn soll. Nun
$\beta\alpha = AB$ und $C\alpha = \gamma\alpha = CA$, so
α und ACα gleichschenkliche Dreiecke

folglich ist $\mu = \varphi$ und $\nu = \psi$ (52. II.), als
$A = \alpha$, also sind jetzt in den Dreiecken
und $B\alpha C$ zwei Seiten und der eingesch
Winkel in dem einen so groß als in den
dern, nemlich $A = \alpha$, $BA = B\alpha$ und $CA =$
folglich sind die Dreiecke $B\alpha C$ und BAC
beide die nemlichen Seiten haben, einander
(49.). Also ist es nicht möglich, daß wenn
die Seiten $\beta\alpha = BA$ und $\alpha\gamma = AC$ übe
$= BC$ ein Dreieck bilden läßt, dieses Dreieck
Dreiecke BAC nicht gleich wäre.

Dritter Beweis unten (66.).

Lehrsatz 7.

55. **Um eine gerade Linie, die durch ei Winkel-Scheitel eines Dreiecks, schen den Seiten um diesen Sche liegt, und folglich die gegenüber hende Seite schneidet (43.), können**

1. **die Seiten des Dreiecks gle seyn,**
2. **mit der Linie gleiche Winkel m chen,**
3. **kann die Linie die gegenüber hende Seite halbiren, und**
4. **kann sie auf diese Seite perp dikulair stehen.**

iese vier Umstände finden zugleich
att, wenn zwei von ihnen statt fin-
n; nemlich: wenn zwei, welche man
ill, statt finden, so finden die übri-
n auch statt.

Es giebt sechs Fälle, nemlich:

4. I. Wenn z. B. AB = AC und $\varkappa = \lambda = \varrho$,
so ist BD = DC und $\varepsilon = \tau$.

II. Wenn BD = DC und $\varkappa = \lambda = \varrho$, so ist
AB = AC und $\varepsilon = \tau$.

III. Wenn $\varepsilon = \tau$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$, so ist AB
= AC und BD = DC.

IV. Wenn AB = AC und BD = DC, so ist
$\varepsilon = \tau$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$.

V. Wenn AB = AC und $\varepsilon = \tau$, so ist $\varkappa = \lambda$
$= \varrho$ und BD = DC.

VI. Wenn BD = DC und $\varepsilon = \tau$, so ist $\varkappa = \lambda$
$= \varrho$ und AB = AC.

Beweis. In allen sechs Fällen sind die beiden
cke ABD und ACD einander gleich, woraus die
heit der andern beiden Stückefolgt, nemlich:

Im I. Falle ist wegen AB = AC auch
C (52. II.) also sind in den beiden Drei-
ADB und ADC zwei Winkel und eine an-
de Seite dieselben, nemlich B = C, $\varkappa = \lambda$,
BA = CA, also ist △ ADB = △ ADC
und folglich BD = DC und $\varepsilon = \tau$.

Im II. Falle sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel dieselben, nemlich $BD = DC$, $AD = AD$ und $\varkappa = \lambda$, also ist $\triangle ADB = \triangle ADC$ (49.), also ist $AB = AC$ und $\varepsilon = \tau$.

Im III. Falle sind zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite dieselben, nemlich $\varepsilon = \tau$, $\varkappa = \lambda$ und $AD = AD$, also ist $\triangle ADB = \triangle ADC$ (50.), also $AB = AC$, $BD = DC$.

Im IV. Falle sind alle drei Seiten dieselben, nemlich $AB = AC$, $BD = DC$ und $AD = AD$, also ist $\triangle ADB = \triangle ADC$ (54) also $\varepsilon = \tau$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$.

Im V. Falle sind wiederum zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel derselben; nemlich: $AB = AC$, $AD = AD$ und $\varepsilon = \tau$ also ist $\triangle ADB = \triangle ADC$ (49.) also $\varkappa = \lambda = \varrho$ und $BD = CD$.

Im VI. Falle sei BE mit AD und AF mit BC parallel, und EAC eine gerade Linie; so ist $\mu = \varepsilon$ und $\varphi = \beta$ (38. II. b.) also sind in den Dreiecken FAB und DAB zwei Winkel und die Seite dazwischen in dem einen so groß als in dem andern, nemlich $\mu = \varepsilon$, $\varphi = \beta$ und $AB = AB$, also sind die Dreiecke einander gleich (50.) und folglich ist $FA = BD = DC$. Ferner ist $\delta = \lambda$ (39. I.) und $\gamma = \omega$ (38. II. b.) also sind in den Dreiecken EFA und ADC ebenfalls zwei Winkel und die Seite dazwischen in dem einen so groß als

ist dem andern, nemlich $\delta=\lambda$, $\omega=\gamma$ und FA=DC, also sind die beiden Dreiecke einander gleich (50.) und folglich ist EA=AC. Nun ist $\mu=\varepsilon$ und $\tau=\upsilon$ (38. II. b.) also ist, weil $\varepsilon=\tau$ sein soll, $\mu=\upsilon$. Also ist das Dreieck EBA gleichschenklich über EB (52. I.); es ist nemlich EA=BA. Es war aber vorhin EA=CA, also ist CA=BA welches das Erste war. Nunmehr ist AD eine gerade Linie, die in einem gleichschenklichen Dreiecke die Winkel zwischen den gleichen Seiten halbirt; sie steht also auf der dritten Seite senkrecht (V.) welches das Andere ist.

Zusätze.

Fig. 25. 56. I. Also entfernen sich zwei gleich lange schräge Linien gleich weit vom Perpendickel, auf verschiedenen Seiten desselben, und machen mit ihm gleiche Winkel: denn wenn AB=AC und AD auf BC perpendikulair ist, so ist BD=DC und $\varepsilon=\tau$ (55. I.)

II. Also sind zwei schräge Linien, im Fall sie sich gleich weit vom Perpendikel entfernen, gleich lang, und machen mit den Perpendikel gleiche Winkel. Denn wenn BD=DC und AD auf BC perpendikulair, so ist AB=AC und $\varepsilon=\tau$ (55. II.)

III. Also sind zwei schräge Linien, im Fall sie mit dem Perpendikel gleiche Winkel machen, gleich

lang und entfernen sich vom Perpendikel g
weit. Denn wenn $\varepsilon = \tau$ und AD auf BC
recht ist, so ist BD = DC und AB =
(55. III.)

IV. Also, wenn gleich lange schräge Li
von einer dritten gleich weit entfernt sind, so
chen sie mit ihr gleiche Winkel, und die dritte L
ist der Perpendikel auf die Grund-Linie. D
wenn AB = AC und BD = DC, so ist $\varepsilon = \tau$
$\varkappa = \lambda = \varrho$ (55. IV.)

V. Also wenn zwei gleich lange schräge Lin
mit einer dritten gleiche Winkel machen, so ent
nen sie sich von ihr gleich weit, und die dritte
ein Perpendikel auf die Grund-Linie. Denn w
$\varepsilon = \tau$ und AB = AC, so ist BD = DC und A
auf DC perpendikulair (55. V.)

VI. Also wenn zwei schräge Linien von ei
dritten gleich weit sich entfernen und mit ihr glei
Winkel machen, so sind sie gleich lang, und
dritte ist ein Perpendikel auf die Grund-Lin
Denn wenn BD = CD und $\varepsilon = \tau$, so ist $\varkappa = \lambda$ u
BA = CA (55. VI.).

VII. Also ist jeder Punct in einem Perp
dikel, von zwei Puncten der Grund-Linie,
gleich weit vom Fuße des Perpendikels liege
gleich weit entfernt; denn besagte Entfernung
sind die Länge zweier schrägen Linien, die sich glei

m Perpendikel entfernen, welche Linien ng sind (II.).

Lehrsatz 8.

In jedem Dreiecke steht der größe. Seite der größere Winkel gegen.

Z. B. Wenn BC $>$ AB, so ist $\alpha > \gamma$.

weis. Denn wenn BD $=$ AB, so würde hen B und C fallen, weil BC $>$ AB . Da nun ABD ein gleichschenkliches über AD ist, so ist $\varphi = \delta$ (52. II.). Nun (46 VI.). Also ist auch $\varphi = \gamma$, und φ, noch um so mehr $\alpha > \gamma$.

jedem Dreiecke liegt dem größeren el die größere Seite gegenüber.

. wenn $\alpha > \gamma$ so ist BC $>$ AB.

eis. Denn man setze, es sey nicht so, wenn $\alpha > \gamma$ ist, entweder BC $=$ AB, $<$ AB seyn. Aber wenn BC $=$ AB wäre $\alpha = \gamma$ (52. II.), und wenn wäre, so wäre $\alpha < \gamma$. Beides ist wi. raussetzung, also kann weder BC $=$ AB $<$ AB seyn, mithin muß BC $>$ AB seyn).

Zusätze.

. Also liegt von je zwei Seiten eines

Dreiecks, die kürzere an dem größeren von de
den, an der dritten Seite liegenden Winkeln.

II. Also ist in einem recht- oder stump
ligen Dreiecke, die dem rechten oder stumpfen
kel gegenüberliegende Seite, die längste von
dreien, weil der rechte oder stumpfe Wink
größte von allen drei Winkeln ist (46. IV.)

III. Also kann nur der größten von de
Seiten eines Dreiecks ein rechter oder stu
Winkel gegenüber liegen, nnd jeder Winke
nicht der größten Seite gegenüber liegt, i
mal kleiner als ein rechter. Denn je zwei
in einem Dreiecke betragen zusammen wenig
zwei rechte (46. I.). Ist also derjenige, d
größten Seite gegenüber steht, > ϱ oder =
ist jeder andere Winkel < ϱ; ist er < ϱ,
ebenfalls noch jeder andere Winkel < ϱ.
jeder andere Winkel, der einer kleinern Se
genüber liegt, ist kleiner als der der grö
Seite gegenüber liegende Winkel (57. I.).
ist jeder Winkel, der nicht der größesten von
drei Seiten gegenüber liegt, in allen Fällen
ner als ein rechter.

Lehrsatz 9.

59. **In jedem Dreiecke sind zwei S
zusammen länger als die dritte.**

Fig. 27. Z. B. $AB + AC > BC$.

Beweis. Denn es sey DAC eine gerade Linie und $DA = AB$, so ist $\mu = \nu$ (52. II.). Nun liegt A zwischen D und C, weil $DC = AC + AB$ seyn soll, also liegt auch AB zwischen BD und BC. Nun ist $\varphi > \nu$, folglich auch $\varphi > \mu$. Dieserhalb ist $DC > BC$ (57. II.). Aber $DC = AC + AB$, also $AC + AB > BC$.

Anmerkung.

60. Wenn unter drei Stücken eines Dreiecks, zwei in einem Dreiecke so groß sind wie in einem andern, so sind die übrigen Stücke gewissen Bedingungen unterworfen, die in folgenden Lehrsätzen enthalten sind.

Die möglichen Fälle sind folgende:

A. Wenn zwei Seiten die nemlichen sind, größer oder kleiner aber
I. der eingeschlossene Winkel
II. die dritte Seite
III. ein anliegender Winkel ist.

B. Wenn ein Winkel und eine der anliegenden Seiten die nemlichen sind, größer oder kleiner aber
I. der andere anliegende Winkel,
II. die andere an den Winkel liegende Seite,

III. der der gleichen Seite gegenüber li
Winkel,

IV. die dem gleichen Winkel gegenüber li
Seite ist.

C. Wenn ein Winkel und die gegenüber li
Seite die nemlichen sind, größer oder
aber

I. einer der übrigen Winkel

II. eine der übrigen Seiten ist.

D. Wenn zwei Winkel die nemlichen sind,
oder kleiner aber

I. die dazwischen liegende Seite

II. eine der anliegenden Seiten ist.

Anstatt das dritte der drei Stücke,
größer oder kleiner zu setzen, darf man d
nur z. B. größer setzen, weil darin der ande
mit enthalten ist, indem dasselbe Stück i
andern Dreiecke alsdann kleiner ist.

Lehrsatz 10. (60. A.)

61. **Wenn in einem Dreiecke zwei S
so groß sind als in einem andern
die übrigen Stücke aber von den
Bedingungen,**

**1. daß der eingeschlossene W
oder**

. die dritte Seite in dem einen Dreiecke größer sey als in dem andern,

. daß der Winkel, welcher der größern von den beiden gleichen Seiten gegenüber steht, in dem ersten Dreiecke kleiner sey als in dem zweiten,

e, welche man will, statt findet, so den die beiden andern auch statt.

Z. B. Wenn AC = $\alpha\gamma$, BC = $\beta\gamma$, und von diesen beiden Seiten die AC oder $\alpha\gamma$ gere ist, sodann aber

$> \gamma$, so ist AB $> \alpha\beta$ und B $< \beta$.

AB $> \alpha\beta$, so ist C $> \gamma$ und B $< \beta$.

B $< \beta$, so ist AB $> \alpha\beta$ und C $> \gamma$.

Beweis zu I. Erste Art. Denn man lege das Dreieck ABC in D$\beta\gamma$, so ist in gleichschenkliches Dreieck über Dα, weil AC = Dγ seyn soll, also ist $\lambda < \varrho$ (53.). ist, weil $\beta\gamma$ nicht die längste Seite in dem $\alpha\beta\gamma$ seyn soll, $\varkappa < \varrho$ (58. III.). Also $\lambda < 2\varrho$, mithin ist $\nu > 0$, also ist $\pi < \beta$ $< \beta$, welches das Erste war. Aber auch und wegen $\gamma < 2\varrho$, $\delta > 0$, also liegt Dβ Dα und Dγ, und folglich ist $\alpha > \beta$

oder $\mu < \lambda$, weil $\varphi = \lambda$ (52. II.). Also ist mehr $\mu < \psi$. Also ist in dem Dreiecke D… dem größten Winkel ψ gegenüberstehende … $D\beta$ größer als die dem kleinern Winkel μ … überstehende Seite $\alpha\beta$. Folglich ist, wei… $= AB$, $AB > \alpha\beta$, welches das Andere ist.

Zweite Art. Wie auf die erste Art … bewiesen, daß $B < \beta$.

Ferner ist in dem Dreiecke $\alpha E\beta$, $\beta E + \alpha$… (59.) und in dem Dreicke $DE\gamma$, $DE + E\gamma$ … (59.), also ist

$$\beta E + DE + \alpha E + E\gamma > \alpha\beta + D\gamma \text{ od…}$$

$$\beta D + \alpha\gamma > \alpha\beta + D\gamma$$

oder, da $\alpha\gamma = D\gamma = AC$ seyn soll, βD… $AB > \alpha\beta$, welches das Andere ist.

Zu II. Wäre zuerst nicht $C > \gamma$, so … entweder $C = \gamma$ oder $C < \gamma$. Im ersten Fal… wären in den beiden Dreiecken ABC und … zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel i… einen so groß als in dem andern, also wär… Dreiecke einander gleich (49.), und folglich … $AB = \alpha\beta$. Im zweiten Falle wäre $\gamma > C$ … $\alpha\beta > AB$ (I.). Beides ist gegen die V… setzung. Also kann nicht $C = \gamma$, auch … $C < \gamma$ seyn, mithin muß nothwendig $C > \gamma$ … (XXVIII.), welches das Erste ist. Wenn…

so ist, weil $AC = \alpha\gamma$ und $BC = \beta\gamma$, nach (I.), welches das Andere ist.

III. Wäre wieder zuerst, nicht $C > \gamma$, entweder $C = \gamma$ oder $C < \gamma$. Im ersten wäre, wie in (II.) $\triangle ABC = \triangle \alpha\beta\gamma$, also Im zweiten Falle wäre $\gamma > C$ also $\beta < B$ (I.). ist gegen die Voraussetzung. Also kann $= \gamma$ noch $C < \gamma$ seyn, mithin muß $C > \gamma$ XVIII.), welches das Erste ist. Wenn $> \gamma$, so ist, weil $AC = \alpha\gamma$ und $BC = \beta\gamma$, β nach (I.), welches das Andere ist.

Lehrsatz 11. (60. B.).

enn in einem Dreiecke eine Seite ein daran liegender Winkel so sind als in einem andern, für die en Stücke aber von den drei Be- ungen:

aß der anliegende Winkel oder ie andere, an den gleichen Winkel egende, Seite in dem einen Drei- ke größer sey als in dem andern, der

er der gleichen Seite gegenüber- egende Winkel in dem ersten Drei- e kleiner sey als in dem zweiten,

finden in jedem Dreiecke die beiden andern auch statt.

Für den besondern Fall aber, wenn das Dreieck, in dem gleich bleibenden Winkel, recht- oder stumpfwinklig ist, kommt noch eine vierte Bedingung hinzu:

4. daß die dem rechten oder stumpfen Winkel gegenüberstehende Seite in dem ersten Dreiecke größer sey als in dem andern,

und wenn eine von den vier Bedingungen statt findet, so finden die übrigen statt.

Fig. 30. Z. B. Wenn BC $=\beta\gamma$ und C $=\gamma$, aber

I. B $>\beta$; so ist AC $>\alpha\gamma$ und A $<\alpha$ und im Fall C $=$ oder $>\varrho$, AB $>\alpha\beta$

II. AC $>\alpha\gamma$, so ist B $>\beta$ und A $<\alpha$ und im Fall C $=$ oder $>\varrho$, AB $>\alpha\beta$

III. A $<\alpha$, so ist AC $>\alpha\gamma$ und B $>\beta$ und im Fall C $=$ oder $>\varrho$, AB $>\alpha\beta$

IV. AB $>\alpha e$, so ist, im Fall C $=$ oder $>\varrho$, AC $>\alpha\gamma$, B $>\beta$ und A $<\alpha$.

Beweis zu I. Man lege BC in $\beta\gamma$ und B in β, so fällt C in γ, weil BC $=\beta\gamma$; desgleichen AC in $\alpha\gamma$, weil C $=\gamma$ seyn soll: also ist

eine gerade Linie. Nun soll B > β seyn, illt αβ zwischen Aβ und γβ und schneidet) Aγ zwischen A und γ (43.), mithin ist)er AC > αγ. Desgleichen ist A < α, weil m Dreiecke Aβα der äußere Winkel α > A 5. VI.), welches zusammen das Erste ist. ns ist, für den Fall, daß C oder γ = oder on dem Dreiecke αβγ der äußere Winkel φ mehr > ρ (46. VI.). Hingegen ist eben 5 ψ < ρ (46. III.), also ist φ > ψ, und Aβ oder AB > αβ (57. II.), welches veite ist.

ı II. Wäre zuerst nicht B > β, so wäre er B = β oder B < β. Im ersten Falle ären in den beiden Dreiecken ABC und vei Winkel und die dazwischen liegende n dem einen so groß als in dem andern, iren die Dreiecke einander gleich (50.) und wäre AC > αγ. Im andern Falle wäre also nach (I.) αγ > AC. Beides ist ge- Voraussetzung, also kann nicht B = β, ht B < β seyn, mithin muß nothwendig seyn (XXIII.). Wenn aber B > β, nächst und BC = βγ ist, so ist nach (I.) A < α die Fälle, in welchen C oder γ = oder AB > αβ.

III. Wäre wiederum zuerst nicht B > β

so wäre entweder $B = \beta$ oder $B < \beta$. Im
Falle wären, wie in (II.), die beiden D
ABC und $\alpha\beta\gamma$ einander gleich, und folglich
$A = \alpha$. Im andern Falle wäre $\beta > B$, als
(I.) $A > \alpha$. Beides ist gegen die Voraussе
also kann nicht $B = \beta$, auch nicht $B < \beta$
mithin muß nothwendig $B > \beta$ seyn (XXV
Wenn aber $B > \beta$, nächst $C = \gamma$ und BC
ist, so ist nach (I.) $AC = \alpha\gamma$, und für die
in welchen C oder γ = oder > ϱ ist, AB >

Zu IV. Wäre wieder zuerst nicht B
so wäre entweder $B = \beta$ oder $B < \beta$. Im
Falle wären, wie in (I.), die beiden Dreiecke
und $\alpha\beta\gamma$ einander gleich, und folglich wäre
$= \alpha\beta$. Im andern Falle wäre $\beta < B$, also
(I.), zufolge der hier und dort statt find
Bedingung, daß C oder γ = oder >
$\alpha\beta > AB$. Beides ist gegen die Voraussе
also kann nicht $B < \beta$ seyn, mithin muß not
dig $B > \beta$ seyn (XXVIII.). Wenn aber B
nächst $C = \gamma$ und $BC = \beta\gamma$ ist, so ist nac
auch noch $AC > \alpha\gamma$ und $A < \alpha$.

Lehrsatz 12. (60. C.).

63. **Wenn in einem Dreiecke eine S
und der gegenüber liegende Wink
groß sind als in einem andern, fü**

übrigen Stücke aber die Bedingung statt findet, daß

I. einer der anliegenden Winkel in dem einen Dreiecke größer sey als in dem andern,

so ist der andere anliegende Winkel kleiner.

Für den besondern Fall aber, wenn das Dreieck in dem gleich bleibenden Winkel recht- oder stumpfwinklig ist, kommt noch eine zweite Bedingung hinzu,

II. daß eine oder die andere von den beiden übrigen Seiten in dem einen Dreiecke größer sey als wie in dem andern;

und wenn eine von den beiden Bedingungen statt findet, so findet die zweite auch statt.

Fig. 31. Z. B. Wenn $BC = \beta\gamma$ und $A = \alpha$, aber

I. $B > \beta$, so ist $C < \gamma$, und im Fall $A =$ oder $> \varrho$, $AC > \alpha\gamma$ und $AB > \alpha\beta$.

II. $AC > \alpha\gamma$, so ist, im Fall $A =$ oder $> \varrho$, $AC > \alpha\beta$, $B > \beta$ und $C < \gamma$.

Beweis zu I. Denn da $A + B + C = 2\varrho = \alpha + \beta + \gamma$ ist (45.) und $A = \alpha$ seyn soll, so ist $B + C = \beta + \gamma$, also ist, wenn $B > \beta$ seyn soll, $C < \gamma$, welches das Erste ist.

Für das Zweite lege man ABC in Aβ
daß BC in $\beta\gamma$ fällt, so wird $\beta\alpha$ zwischen
und $\beta\gamma$, und Aγ zwischen $\beta\gamma$ und $\alpha\gamma$ fallen
B $>$ β seyn soll und C $<$ γ war. Nun sol
A oder α = oder $>$ ϱ seyn, daraus folgt φ
denn es ist $\varphi > \alpha > \varrho$. Hingegen $\psi < \varrho$,
$\lambda < 2\varrho$ ist (46. II.) und A = oder $> \varrho$ sey
also λ — A oder $\psi < \varrho$ ist. Also ist in
Dreiecke A$\alpha\gamma$, Aγ oder AC $>$ $\alpha\gamma$ (57.
Eben so ist $\lambda > \varrho$, $\tau < \varrho$, also $\lambda > \tau$, folglic
oder AB $<$ $\alpha\beta$, welches das Andere ist.

Zu II. Wäre zuerst nicht B $>$ e, so
B = β oder B $<$ β (XXVIII.). Im ersten
aber wären in dem einen Dreiecke ABC
Winkel und eine anliegende Seite so groß a
dem andern $\alpha\beta\gamma$, also wären die Dreiecke e
der gleich (51.), mithin wäre auch AC =
Im andern Falle wäre $\beta > B$, also nach (I.),
ter der hier wie dort statt findenden Beding
daß A oder α = oder $> \varrho$ sey, $\alpha\beta >$ AC.
des ist gegen die Voraussetzung, also kann
B = β, auch nicht B $<$ β seyn, mithin muß
wendig B $>$ β seyn (XXVIII.) Wenn aber B
nächst A = α und BC = $\beta\gamma$, so ist nach
auch noch C $<$ γ, und unter der hiesigen
dortigen Bedingung, daß A oder α = oder
sey, AB $<$ $\beta\alpha$.

Lehrsatz 13. (60. D.)

enn in einem Dreiecke zwei Winkel
groß sind als in einem andern, ir
d eine Seite aber, die dazwischen
ende oder eine anliegende, in dem
em Dreiecke größer ist als in dem
ern, so sind die beiden andern Sei
in dem ersten Dreiecke auch größer
in dem andern.

Z. B. Wenn B = β und C = γ, aber
C > βγ, so ist AB > αβ und AC > αγ.
C > αγ, so ist AB > αβ und BC > βγ.

eweis zu I. Man lege βγ in BC und
so wird auch αβ in AB fallen, weil β = B
ll. Ferner wird αγ mit AC parallel seyn,
= C seyn soll (38. I. b.). Nun soll BC > βγ
also wird γ zwischen B und C fallen. Da
> o und nicht > C seyn soll, so wird auch
en B und A fallen. Mithin wird AB > αβ
Legt man zweitens αβγ so in ABC, daß
fällt, wie α β' C, so wird auf gleiche Art
, daß AC > αγ.

II. Denn wenn B = β und C = γ, so ist
= α (46. XII.). Wenn aber nun A = α,
= γ und AC > αγ so ist nach (I.) auch
β und BC > βγ.

Anmerkung.

...erdeck ist die Uebersicht der ...

schen den sechs Stücken zweier Dreiecke, we
Stücke in dem einen so groß sind als in dem a

Fig. 28.

A. I.	$AC = \alpha\gamma$, $BC = \beta\gamma$, $C > \gamma$	$AB > \alpha\beta$	$\alpha\gamma > \beta\gamma$	$B < \beta$	61.
- II.	. . . . . . $AB > \alpha\beta$	$C > \gamma$	$\alpha\gamma > \beta\gamma$	$B < \beta$	-
- III.	. . . . $B < \beta$	. . . . .	$\alpha\gamma > \beta\gamma$	$AB > \alpha\beta$, $C > \gamma$	-
B. I.	$BC = \beta\gamma$, $C = \gamma$, $B > \beta$	$AC > \alpha\gamma$, $A < \alpha$	$C =$ oder $> \varrho$	$AB > \alpha\beta$	62.
- II.	. . . . . . $AC > \alpha\gamma$	$B > \beta$, $A < \alpha$	$C =$ oder $> \varrho$	$AB > \alpha\beta$	-
- III.	. . . . $A < \alpha$	$AC > \alpha\gamma$, $B > \beta$	$C =$ oder $> \varrho$	$AB > \alpha\beta$	-
- IV.	. . . . . . $AB > \alpha\beta$	. . . . . .	$C =$ oder $> \varrho$	$AC > \alpha\gamma$, $B > \beta$	-
C. I.	$BC = \beta\gamma$, $A = \alpha$, $B > \beta$	$C < \gamma$	$A =$ oder $> \varrho$	$AC > \alpha\gamma$, $AB > \alpha\beta$	63.
- II.	. . . . . $AC > \alpha\gamma$	. . . . .	$A =$ oder $> \varrho$	$AC < \alpha\gamma$, $B > \beta$, $C < \gamma$	-
D. I.	$B = \beta$, $C = \gamma$, $BC > \beta\gamma$	$AB > \alpha\beta$ $AC > \alpha\gamma$	. . .	. . . .	64.
- II.	$B = \beta$, $C = \gamma$, $AC > \alpha\gamma$	$AB > \alpha\beta$ $BC > \beta\gamma$	. . .	. . . .	-

Anmerkung.

66. Auf den Satz (61. I.) gründet sich der dritte Beweis des Satzes (54.), daß zwei Dreiecke einander gleich sind, wenn die drei Seiten in dem einen so groß sind als in dem andern.

Dritter Beweis. In (61. I.) wird bewiesen, daß, wenn zwei Seiten in einem Dreiecke so groß sind als in einem andern, die Winkel aber, die sie einschließen, ungleich sind, daß dann die dritten, den eingeschlossenen Winkeln gegenüber liegenden Seiten ebenfalls ungleich sind. Sollen nun diese dritten Seiten gleich seyn, so müssen es die gegenüber liegenden Winkel ebenfalls seyn, weil, wenn sie ungleich wären, wie bewiesen, die Seiten ungleich seyn würden, gegen die Voraussetzung. Dasselbe gilt von jedem Winkel, also müssen die drei Winkel in dem einen Dreiecke so groß seyn als in dem andern, wenn es die drei Seiten sind; mithin sind die Dreiecke einander gleich, wenn die drei Seiten in dem einen so groß sind als in dem andern.

Lehrsatz 14.

Fünfter bedingter Fall der Gleichheit von Dreiecken (48. II. b.).

67. Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Seiten und der, der grö-

ßern von ihnen gegenüber lie
Winkel in dem einen so groß si
in dem andern.

Fig. 33. Z. B. Wenn AC > BC und A
BC = βγ, B = β, so ist △ABC =

Beweis. Man setze, die Dreiecke
nicht gleich, also z. B. nicht C = γ, so wär
oder C < γ (XXVIII.). Allein wenn AC
BC = βγ und C > γ, so ist nach (61. I.
ausgesetzt wie hier daß AC > BC, B <
wenn C < γ und B > β. Beides ist wi
Voraussetzung. Also kann nicht C > γ au
C < γ seyn, mithin muß nothwendig C =
(XXVIII.). Wenn aber nun C = γ, näc
= αγ und BC = βγ ist, so sind zwei Seit
der eingeschlossene Winkel in dem einen
so groß als in dem andern, also sind die
einander gleich (49.).

Die Bedingung AC > BC ist die n
wie die, daß die Seite, die dem gleichen
gegenüber steht, nicht die kürzeste von de
Seiten, oder der gleiche Winkel nicht der
von den drei Winkeln seyn soll.

Zusatz.

68. Da in einem recht- oder stumpf
gen Dreiecke der rechte oder stumpfe Win

mer der größte von allen dreien ist (46. IV.), also nicht kleiner seyn kann als einer der andern, so gilt der Satz (67.) von allen recht- und stumpfwinkligen Dreiecken; und recht- und stumpfwinklige Dreiecke sind folglich einander gleich, wenn nächst dem rechten oder stumpfen Winkel, zwei anliegende Seiten in dem einen so groß sind als in dem andern.

Anmerkung.

69. Man kann den Satz (67.) für den besondern Fall rechtwinkliger Dreiecke auch unmittelbar folgendergestalt beweisen. Es ist nemlich $\triangle ABC = \triangle \alpha\beta\gamma$, wenn nächst $B = \beta = \varrho$, z. B. $AB = \alpha\beta$ und $AC = \alpha\gamma$.

Fig. 34.

Beweis. Man lege $\alpha\beta$ in AB und β in B, so wird $\beta\gamma$ in BC fallen, weil $\beta = B$ seyn soll. Ferner falle $\beta\gamma$ andern Theils in $B\gamma$, nachdem $\alpha\beta$ in AB und β in B gelegt worden, so wird $CB\gamma$ eine gerade Linie seyn, weil $\varkappa = \lambda = \varrho$ seyn soll, also $\varkappa + \lambda = 2\varrho$ ist. Also ist nunmehr γAC ein gleichschenkliges Dreieck über γC, weil $AC = \alpha\gamma$ seyn soll, folglich ist $\gamma = C$ (52. II.). Also sind nunmehr in dem Dreiecke ABC zwei Winkel und die anliegende Seite so groß als in dem Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, nemlich $\lambda = \beta$, $C = \gamma$ und $AB = \alpha\beta$, also sind die Dreiecke einander gleich (51.). Der Satz

gilt aber, wie oben gezeigt, nicht allein für recht, winklige, sondern auch für stumpfwinklige Dreiecke.

Anmerkung zum sechsten Falle der Gleichheit dreier Stücke in zwei Dreiecken (48. IV.).

70. Wenn die drei Winkel in einem Dreiecke so groß sind als in einem andern, so sind deshalb die Dreiecke nicht einander gleich.

Fig. 35. Beweis. Denn es seyen z. B. die beiden Seiten AB und CB des Dreiecks ABC nach Belieben verlängert und DE mit AC parallel, so ist $\mu = \nu$ und $\varkappa = \lambda$ (38. II. b.), also sind in dem Dreiecke DBE alle drei Winkel so groß als in dem Dreiecke ABC. Gleichwohl können die Dreiecke an Größe nach Belieben verschieden seyn.

Anmerkung.

71. Folgendes ist die Uebersicht der Fälle, in welchen die Gleichheit zweier Dreiecke aus der Gleichheit dreier von ihren sechs Stücken folgt.

Die Dreiecke sind gleich, wenn	No.
I. $AB = \alpha\beta$, $AC = \alpha\gamma$, $BC = \beta\gamma$	54
II. a. $AB = \alpha\beta$, $BC = \beta\gamma$, $B = \beta$	49
Fig. 36. - b. $AC = \alpha\gamma$, $BC = \beta\gamma$, $B = \beta$, $AC > BC$.	67
III. a. $BC = \beta\gamma$, $B = \beta$, $C = \gamma$, ...	50
- b. $AC = \alpha\gamma$, $B = \beta$, $C = \gamma$, ...	51

Anmer-

Anmerkung.

nstatt von den drei Stücken, von deren
hheit die Gleichheit zweier Dreiecke ab.
t, zwei in einem Dreiecke so groß anzuneh.
als in einem andern, und das dritte in
einen Dreiecke kleiner oder größer seyn zu
als in dem andern, kann man auch nur
inziges Stück gleich, und die andern beiden
r oder kleiner seyn lassen. Von den Fäl.
die daraus entstehen, ist nur folgender eine
erken.

Lehrsatz 15.

enn in einem Dreiecke eine Seite
roß ist als in einem andern, die
kel aber zwischen welchen sie liegt,
größer sind als in dem andern,
nd die andern beiden Seiten zu.
ien genommen in dem ersten Drei.
länger als in dem andern.

Z. B. Wenn $BC = \beta\gamma$, aber $B\ \beta$, $C > \gamma$,
so ist $AB + AC > \alpha\beta + \alpha\gamma$.

weis. Denn man lege $\beta\gamma$ in BC und
in B, so wird γ in C fallen, weil $\beta\gamma$
yn soll. Ferner wird αB zwischen AB
fallen, weil $\beta > o < B$, desgleichen αC
AC und BC, weil $\gamma > o < C$ seyn soll. Also
gerade Linie $B\alpha$, verlängert die Seite AC

zwischen A und C treffen (43.), desgleich
gerade Linie Cα die BE zwischen B und E
Also wird der Punct α nothwendig innerha
Dreiecks ABC fallen. Nun ist in dem D
αEC, αE + EC > αC (59.), also ist, wen
beiderseits Bα hinzuthut, BE + EC > Bα
Ferner ist in dem Dreiecke ABE, BA + AE
(59.), also ist, wenn man beiderseits EC
thut: BA + AC > BE + EC. Nun war
BE + EC > Bα + αC, also ist um so meh
+ AC > Bα + αC, oder AB + AC > αβ

Lehrsatz 16.

74. Wenn durch einen beliebigen W
Scheitel eines Dreiecks auf die g
über stehende Seite eine gerade
perpendikulär ist, so liegen

I. von den beiden übrigen S
des Dreiecks, die größere,

II. von den Winkeln, welche das
pendikel mit diesen Seiten m
der größere, und

II. von den Stücken, welche das
pendikel von den gegenüber st
den Seiten abschneidet, das gr

allemal zugleich, an einerlei Seit
Perpendikels.

z. B. Wenn AD auf BC perpendikulair
ist, und es ist
AB > AC, so ist BD > CD und $\mu > \nu$
BD > CD, so ist AB > AC und $\mu > \nu$
$\mu > \nu$, so ist AB > AC und BD > CD
eweis zu I. In den beiden rechtwinkli-
reiecken BAD und CAD sind der rechte
D und eine an ihm liegende Seite AD
einen so groß als in dem andern, die
eichen Winkel gegenüber liegende Seite AB
in dem Dreiecke ABD größer als in dem
ACD, also ist die dritte Seite BD > CD,
er ihr gegenüber liegende Winkel $\mu > \nu$
7.).
II. In den beiden rechtwinkligen Drei-
AD und CAD sind der rechte Winkel D
an ihm liegende Seite AD in dem einen
als in dem andern, die andere anliegende
D aber ist in dem Dreiecke BAD größer
em Dreiecke CAD, also ist die dritte Seite
C und der andere anliegende Winkel $\mu > \nu$
.
III. In den beiden rechtwinkligen Drei-
D und CAD sind der rechte Winkel D
an ihm liegende Seite AD in dem einen
als in dem andern, der andere anliegende
aber ist in dem Dreiecke BAD größer

als ν in dem Dreiecke CAD, also sind die beiden andern Seiten AB > AC und BD > CD (62. I.).

Zusätze.

Fig. 39. 75. I. Also liegt von zwei ungleich langen schrägen Linien die kürzere dem Perpendikel am nächsten und macht mit ihm den kleinsten Winkel. Denn wenn AD auf BC perpendikulair und AB > AC ist, so ist BD > CD und μ > ν (74. I.).

II. Also ist von zwei schrägen Linien, diejenige die dem Perpendikel am nächsten liegt, die kürzere, und macht mit ihm den kleinern Winkel. Denn wenn AD auf BC perpendikulair und BD > CD, so ist AB > AC und μ > ν (74. II.).

III. Also liegt von zwei schrägen Linien diejenige dem Perpendikel am nächsten und ist die kürzere, die mit ihm den kleinern Winkel macht. Denn wenn AD auf BC perpendikulair, und μ > ν, so ist BD > CD und AB > AC (74. III.).

IV. Also ist jeder Punct außerhalb eines Perpendikels von zwei Puncten in der Grundlinie, die gleich weit vom Fuße des Perpendikels entfernt sind, ungleich weit entfernt.

Fig. 40. Denn wenn z. B. BE = EC, so wird das Perpendikel AD auf BC, aus dem Puncte A, der außerhalb des Perpendikels EF liegen soll,

der BC, außerhalb E, etwa in D begegnen. Also werden BD und DC ungleich seyn, und folglich werden sich die schrägen Linien AB und AC, die die Entfernungen des Puncts A von B und C sind, ungleich weit von ihrem Perpendikel entfernen. Also werden sie ungleich lang seyn (II.).

V. Also ist jede schräge Linie länger als das zugehörige Perpendikel. Denn eine schräge Linie ist um so kürzer, je näher sie dem Perpendikel liegt.

VI. Also ist ein Perpendikel die kürzeste gerade Linie, die von einem Puncte nach einer geraden Linie gezogen werden kann, weshalb man auch das Perpendikel, das natürliche Maaß der Entfernung, oder den Abstand des Puncts von der geraden Linie nennt.

Dieses wäre, was die Gleichheit der begrenzten Figuren in der Ebene betrifft, und zwar bis hierhin die Dreiecke. Es kämen jetzt die Vielecke an die Reihe, die den Abschnitt von der Gleichheit der Figuren beschließen würden. Darauf käme der zweite Abschnitt von der Aehnlichkeit der Figuren, welcher ähnliche Unterabtheilungen für Dreiecke und Vielecke haben würde, und darauf der dritte Abschnitt von der Größe der Figuren mit ähnlichen Abtheilungen, und so weiter nach dem obigen Entwurfe des Systems.

Aus dem hier mitgetheilten Bruchstücke ist deutlich genug zu sehen, wie nach meiner Meinung der Vortrag der Raum-Größenlehre einzurichten seyn würde. Die Principien, die hier in Absicht der Eintheilung und Ordnung befolgt worden sind, und die aus ihnen entstandene, wie es scheint, der Natur der Sache angemessene, Entwickelung des Vortrages sind daran leicht zu erkennen. Nächstdem enthält das Bruchstück die Grundzüge einer nach den obigen Vorschlägen entwickelten Paralle-

len-Theorie ohne Lücken, vollständig. Es genügt also zu den beiden Zwecken, für welche die gegenwärtige Abhandlung bestimmt ist.

Als ich nach reiflicher Erwägung der obigen Ansichten, über die Mittel, die Parallelen-Theorie auf dem vorgeschlagenen Wege zu begründen, mit mir einig geworden war, entwarf ich sie in wenigen Worten, und sandte einen kleinen Aufsatz darüber, der zugleich noch einen Gedanken über Incommensurabilität enthielt, an die Redaction der Leipziger Literatur-Zeitung, um in diesem Blatte abgedruckt zu werden, und auf diesem Wege das Urtheil der Kenner über meine Ansichten zu erfahren. Mein Aufsatz, so weit er hierher gehört, war folgender.

Für Mathematiker.

„Es ist bekannt, daß die Theorie der Parallelen und die der Irrationalität bei der Aehnlichkeit der Figuren, seit Euclides, die schwierigsten „Lehren der Geometrie gewesen sind, und daß noch „Manches daran zu wünschen übrig bleibt. Gleichwohl sind diese beiden Sätze gleichsam die Grundsäulen aller übrigen, auf welche sich diese ohne „weitere Schwierigkeit aufrichten lassen. Es ist „daher wohl recht, nicht eher abzulassen, als bis „die Grundzüge der reinsten Wissenschaft, die wir

„besitzen, zu derjenigen Evidenz gebracht sind,
„sie fähig zu seyn scheinen. Ich will hier
„möglichster Kürze, und nur durch die noth
„digsten Vordersätze eingeleitet, eine Beweisar
„beiden Sätze mittheilen, die strenge, und di
„türlichste zugleich zu seyn scheint, und wü
„von Kennern ein Urtheil darüber in diesen
„tern zu vernehmen, weil ich willens bin,
„Ansicht in einem neuen Lehrbegriff der Ele
„der Geometrie, an welchem ich arbeite, und
„ich mit der alten Strenge zugleich die mög
„Allgemeinheit, und eine naturgemäße Ord
„mit der möglichsten Kürze und Beschränkun
„das Wesentliche zu vereinigen bemüht bin,
„Grunde zu legen. Die Ansichten, welche ich
„den Parallelen gebe, ist zwar der Bertrand
„ähnlich, aber nicht ihr gleich. Man wird
„erkennen, und es ist hier nicht der Ort, au
„der zu setzen, daß sie durch wesentliche Ver
„rungen und Ergänzungen, ohne die jene nich
„Angriffen frei zu seyn scheint, eigentlich zu
„andern wird u. s. w."

Theorie der Parallelen.

„Es reducirt sich alles darauf, von den b
„Sätzen:

„1. daß zwei gerade Linien, die sich schn

mit einer dritten ungleiche Winkel machen,
und
daß sich, umgekehrt zwei gerade Linien, wenn
sie mit einer dritten ungleiche Winkel machen,
nothwendig schneiden,
blos den einen, sondern beide gleich strenge
eweisen. Die Vordersätze, die ich nöthig
, sind folgende. Die zwischen liegenden
ehe ich."

Eine gerade Linie ist die, welche an allen
n dieselbe Gestalt hat, so daß man jede
nach einer beliebigen andern kehren kann,
daß die Linie im Raume einen andern Ort
imt."

Wenn zwei gerade Linien, die in einer Ebene
, in einem Puncte sich schneiden, so heißt
wischen ihnen liegende, nunmehr an zwei
begrenzte, übrigens unbegrenzte Ebenen
Winkel. Schneiden hingegen die Linien
cht, so heißt der zwischen ihnen liegende
Parallel-Raum, die Linien selbst hei-
arallelen."

wei Winkel aneinander gesetzt, füllen wie-
einen Winkel, und zwar einen größern, ganz
Denn da die geraden Linien, die ihre an-
r gelegten Schenkel bilden, an beiden Sei-
iche Gestalt haben, so bleibt zwischen den

„Schenkeln weiter kein Raum. Hieraus folgt, daß „der ganze unbegrenzte Ebenen-Raum aus Win„keln zusammengesetzt werden kann. Er selbst nem„lich ist ein Winkel, z. B. das Vierfache eines „rechten Winkels."

„Zwei Parallel-Räume an einander gelegt, „füllen wiederum einen Parallel-Raum aus. Denn

Fig. 1. „wenn eine gerade Linie, z. B. EF mit „zwei andern geraden Linien AB und CD, „zwischen welchen sie liegt, parallel ist, so sind „diese letzten unter sich auch parallel. Das letzte „folgt also: Man setze nemlich, AB und CD wä„ren nicht parallel und schnitten sich folglich, so „könnte dieses Schneiden nur entweder in, oder „neben der Linie EF geschehen. In beiden Fällen „aber würden die Linien zugleich mit der EF zu„sammen kommen, nemlich im ersten Falle, nach „der Annahme selbst, im zweiten, weil die eine „Linie erst auf die andere Seite von EF treten, „und folglich EF durchschneiden müßte. Da nun „dieses wider die Voraussetzung ist, so schneiden „sich die Linien nicht und sind folglich parallel. „Hieraus folgt nun, daß der ganze unbegrenzte „Ebenen-Raum aus Parallel-Räumen nicht zusam„mengesetzt werden kann, weil, so viel Parallel„Räume man auch ansetzen mag, immer wieder „nur ein Parallel-Raum entsteht, außerhalb wel„chen noch unbegrenzter Raum liegt."

in Winkel ist innerhalb eines Parallel-
enthalten; denn man setze so viel Paral-
ume an einander, als man Winkel von
öße des gegebenen aneinander setzen muß,
ganzen Raum zu füllen, welches Füllen
bigem allemal möglich ist, so müßte, wenn
inkel in dem Parallel-Raume enthalten
uch der ganze Raum in jenen aneinander
Parallel-Räumen enthalten seyn. Da
s Letzte nicht der Fall ist, weil kein Pa-
aum den ganzen Raum füllt, so ist auch
Binkel in einem Parallel-Raume ent-

t Hülfe dieser Vordersätze ist nun der
der beiden obigen Sätze für Parallelen
r, nemlich:

„Wenn zwei gerade Linien DB und AE
„sich schneiden, so machen sie mit einer
inie AF in B und A ungleiche Win-
nn der Winkel DBF ist um den Raum
rößer und um den Raum ABC kleiner
Winkel EAF. Der eine Winkel könnte
andern nur dann gleich seyn, wenn
ABC wäre. Nun ist aber DCE ein
zter, ABC ein begrenzter Raum. Soll-
gleich seyn, so müßte erst DCE be-
der ABC unbegrenzt seyn. Nun ist kei-

„nes von beiden der Fall: es ist also auc
„DCE = ABC und folglich auch nicht
„EAF, sondern DBF und EAF sind unglei
„meine hier keinesweges, daß DBF > EAF
„ich müßte sonst behaupten, daß DCE >
„sey, welches nicht angeht, da, wie sich
„läßt, ein unbegrenzter Raum mit einem b
„ten, der Größe nach, eben so wenig vergl
„ist, wie je zwei andere ungleichartige Dinge
„Pfund mit Thaler u. s. w. Daß DBF >
beweise ich nach Euclid I. Buch 16. Satz)."

Fig. III. „Wenn zwei gerade Linien AB un
„mit einer dritten BE ungleiche
„machen, so müssen sie sich nothwendig schn
„Denn man setze, sie schnitten sich nicht, so
„ABCD ein Parallel-Raum seyn. Nun sey
„der Unterschied der Winkel, so daß FDE
„ABE ist, so würde FD die AB nothw
„schneiden müssen, weil der Winkel FDC,
„Obigem, in dem Parallel-Raume ABDC
„enthalten ist. Schneidet aber die Linie F
„Linie AB, so machen wiederum AB und
„nach dem vorigen Satze, mit BE ungl
„Winkel. Gleichwohl sollen die Winkel gleich
„also geht es nicht an, daß ABCD ein Pa
„Raum ist, oder daß CD die AB nicht sch
„mithin muß CD die AB nothwendig schnei

„Dieses sind die beiden Hauptsätze des Pa„rallelismus. Alle darauf beruhenden Sätze folgen „nun ohne weitere Schwierigkeit. Die nächsten „z. B. wären folgende:

„Parallel-Linien machen mit einer dritten sie „schneidenden gleiche Winkel; denn machten sie „ungleiche Winkel, so würden sie, nach dem zwei„ten obigen Satze, nothwendig sich schneiden, und „würden also nicht parallel seyn."

„Gerade Linien, die mit einer dritten gleiche „Winkel machen, sind parallel; denn wären sie „nicht parallel oder schnitten sich, so würden sie, „nach dem ersten obigen Satze, nicht gleiche, son„dern ungleiche Winkel machen u. s. w."

Der Aufsatz wurde in No. 189. Intelligenz-Blatt vom 5. August 1815 abgedruckt, und zugleich mit ihm, also schon verfaßt ehe mein Aufsatz gedruckt war, einige Erinnerungen des Herrn Prof. Mollweide, die, so weit sie die Parallelen-Theorie, also die hiesige Abhandlung angehn, folgende waren:

Ein paar Bemerkungen zu vorstehendem Aufsatze.

„Wenn man auch die Vergleichung der Win„kel, mittelst der zwischen ihren Schenkeln enthal„tenen, unbestimmbaren Flächen-Räume in

„den Elementen zulassen wollte, so würk
„Herrn C. oben mitgetheilte Theorie der
„len, wegen der ihr abgehenden Schärfe,
„verdienen, an die Stelle der Euclidischen
„zu werden, denn

„1) muß, damit Herrn C. Beweis
„seinem ersten Satze: Zwei Parallel-Räume
„eingeschalteten Satzes, daß wenn zwei ge
„nien AB und CD einer dritten zwischen
„liegenden EF parallel sind, sie auch unt
„der parallel sind, für den Fall, wenn der
„schnittspunct der AB und CD nicht auf
„liegen angenommen wird, vollkommene
„erhalte, der Satz: daß eine gerade Linie,
„innerhalb eines Winkels, dem einen Schen
„selben parallel läuft, genugsam verlänger
„andern Schenkel schneide, als bewiesen vor
„setzt werden. Wenn nemlich AB und CD
„der außerhalb der EF schneiden, so bild
„einen Winkel, innerhalb dessen die EF
„Schenkeln parallel ist, und hieraus allein,
„durch Berufung auf den Augenschein, mu
„Unmöglichkeit der Annahme gefolgert werden
„dieses kann nur mit Hülfe des angegebenen
„eines ähnlichen Satzes geschehen, wobei aber
„Euclides 11tes Axiom vorausgesetzt wird."

„2) Nimmt Herr C. an, daß die gan

„grenzte Ebene um die Spitze eines Winkels alle-
„mal ein Vielfaches des Winkels sey. Ich
„brauche wohl gegen diese Annahme nichts zu
„erinnern", da ihre Unzulässigkeit in die Augen
„springt."

„3) Wenn eine unbegrenzte Fläche und eine
„begrenzte, nach Herrn C. Behauptung, in dem
„Sinne heterogen sind, wie Pfund und Thaler, so
„ist der Beweis von Herrn C. zweitem Satze un-
„gültig. Denn alsdann läßt sich der begrenzte
„Raum ACB zu dem unbegrenzten DBF eben so
„wenig addiren, als man ein Pfund zu drei Tha-
„ler addiren kann u. s. w."

Mollweide.

Da diese Einwendungen nicht begründet wa-
ren, so glaubte ich der Wissenschaft schuldig zu
seyn, den Gegenstand nicht fallen, und durch eine
entgegengesetzte geachtete Meinung der Sache
schaden zu lassen. Ich sandte die Gründe, aus
welchen ich die Erinnerungen des Herrn Mollweide
nicht für beweisen halte, an die genannte Re-
daction zum Abdruck, wie folgt.

„Die Bemerkungen des Herrn Mollweide über
„den genannten Aufsatz sind zwar sehr schätzbar,
„aber wenn sie Beweise gegen meine Sätze seyn
„sollen, nicht genügend."

„1) Behauptet Herr M. gegen den Beweis

„des Satzes: daß zwei gerade Linien, di
„dritten zwischen ihnen liegenden nicht beg
„sich selbst nicht begegnen können, worin d
„hauptung vorkommt, daß wenn man ann
„die äußern Linien schnitten sich außerhalb de
„leren, so könne das nicht geschehen, ohne
„zu begegnen: daß dieser Umstand nicht au
„Augenscheine genommen, sondern daß zu sein
„gründung erst der Satz bewiesen werden m
„daß eine gerade Linie, die mit dem Schenkel
„Winkels parallel ist, genugsam verlängert d
„dern schneide. Diese Behauptung ist ab
„Gegen-Beweis, sondern es mußte vi
„erst bewiesen werden, daß der Satz auf d
„Herrn M. verlangte Art bewiesen werden
„und auf keine andere. So lange man
„zeigt, wie zwischen zwei Puncten, die auf ve
„denen Seiten einer geraden Linie liegen, ei
„rade Linie gezogen werden könne, ohne jene g
„Linie zu schneiden, was nach meinen Vorst
„gen zum Grundsatz wird, bleibt mein Satz
„stritten. Die Berufung auf den Augenschei
„det übrigens mit eben dem Rechte statt wie ü
„beim Euclides. Auf einen andern Augen
„berufe ich mich nicht."

„2) Daß Herr M. den Satz: der ganz
„begrenzte Ebenen-Raum sey das Vielf

Winkels, für so sehr unrichtig hält, daß
) auf den Gegen-Beweis gar nicht einmal
t, ist nur auf die Weise erklärlich, daß Herr
lleicht unter dem Ausdrucke: Vielfaches, ein
ches in ganzen Zahlen verstanden wissen
enn außerdem ist mein Beweis deutlich ge-
der Satz selbst aber ist so richtig wie ir-
iner. Mit einem Vielfachen in ganzen
hieße der Beweis, und zwar unmittelbar
zen Satzes, wozu der hiesige dient, also.
n man nemlich einen Winkel (den Raum
zwei geraden Linien die sich schneiden)
an einander gesetzt hat, z. B. nmal, daß
n ganzen Ebenen-Raum nur noch ein
übrig bleibt, der kleiner ist als der ein-
inkel, so setze man nunmehr n + 1 Pa-
äume aneinander, und der entstehende Pa-
um müßte um so mehr größer seyn als
e Ebenen-Raum. Da das nun nicht
ist, so folgt sehr strenge, daß kein Win-
nem Parallel-Raum enthalten ist, zu
letzten Satze die Behauptung dient, die
verwirft."

Findet bei der Berufung auf die Un-
keit begrenzter und zum Theil unbe-
Räume, die bei dem Satze vorkommt:

„daß gerade Linien, die sich schneiden, mit einer „dritten ungleiche Winkel machen, allerdings eine „Ungenauigkeit im Ausdrucke statt, für deren „Nachweisung ich Herrn M. danke; allein der „Satz selbst, der nicht von dem Ausdrucke ab„hängt, bleibt deswegen unangefochten. Ein be„grenzter und ein zum Theil unbegrenzter Raum „sind freilich nicht eben so verschieden wie Pfund „und Thaler, allein sie sind dennoch ungleichartig, „auf die Weise, daß der eine dem andern nicht „gleich seyn kann, welche auch die Räume seyn „mögen, welches für den Satz das Nothwendige „ist. Gleich nenne ich zwei Räume, wenn ihre „Grenzen überall in einander fallen, oder, wie „man sonst sagt, sich decken."

„Was übrigens in der Parallelen-Theorie, „die Herr M. angreift, wirklich ein Gegenstand „von Einwendungen seyn dürfte, das heißt, wor„über noch weitere Erklärungen und Beweise zu „verlangen seyn dürften, sind wohl die Definitio„nen und Vorstellungen z. B. von dem unbegrenz„ten Raume, weil sie den gewohnten Vorstellun„gen der Alten entgegen sind; nicht aber die „Schlüsse und Folgerungen daraus, die, wenn „man die Vordersätze stehen läßt, wie Herr M. „thut, wahrscheinlich nicht mit Grunde werden „angefochten werden können.

diese Gegen-Bemerkungen wurden aber, weil
ɑum des Blattes weitere Discussionen nicht
, nicht abgedruckt. Ich mußte also in fol-
kurzen Anzeige, in der genannten Literatur-
, nemlich:

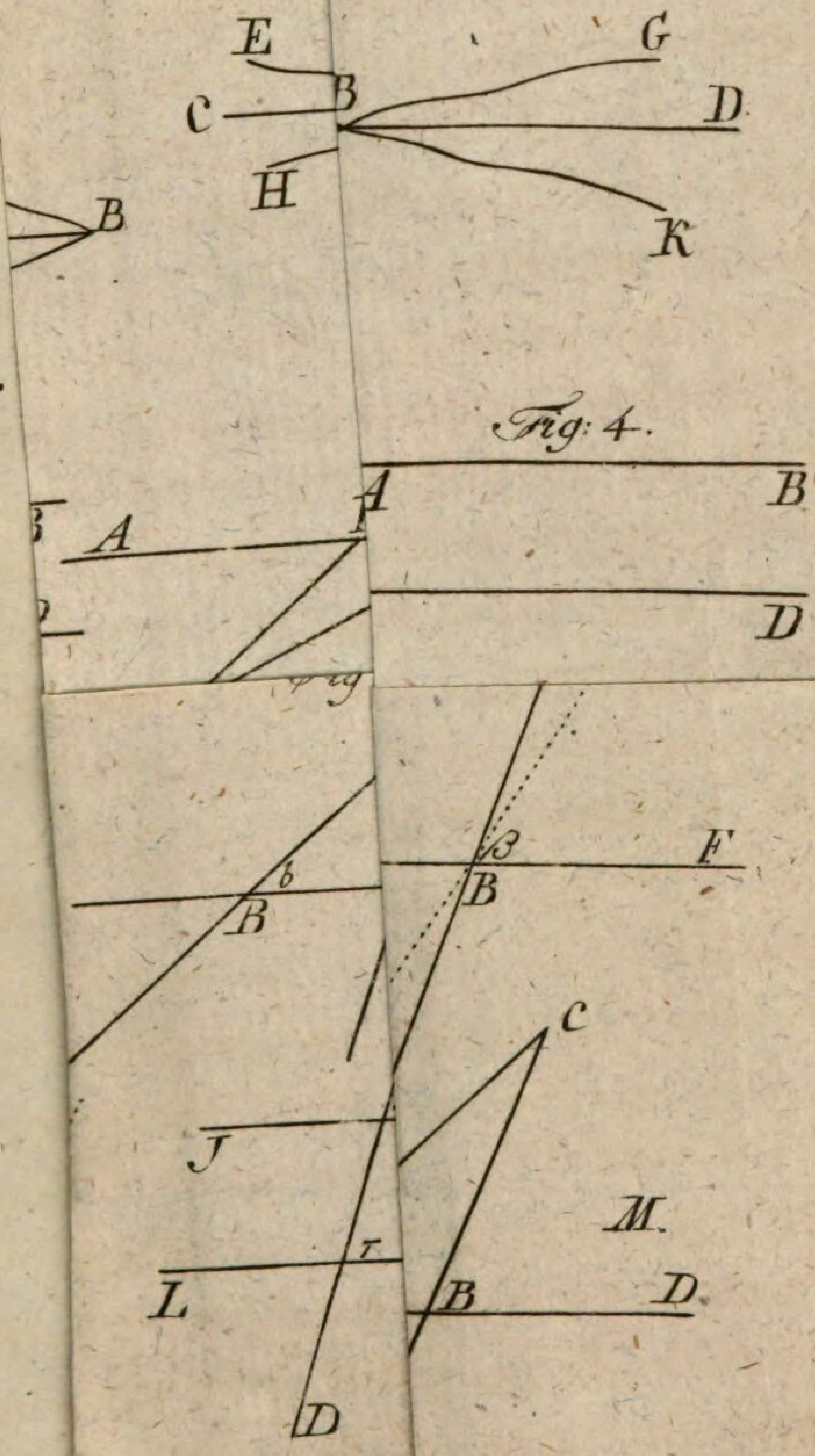
Die Bemerkungen, welche Herr Mollweide
meine, in No. 189 dieses Blatts vom Jahr
abgedruckte, Skizze einer Theorie der Parallel-
und der Incommensurabilität gemacht hat,
war sehr schätzbar, aber wenn sie Beweise
meine Sätze seyn sollen, nicht genügend.
offe dieses in einer nächstens erscheinenden,
ndigen Abhandlung meiner Theorie der Pa-
, in welcher ich diese Theorie zu aller der-
Evidenz zu bringen hoffe, die man ver-
kann, für die Parallelen zu beweisen, wor-
also, weil hier der Raum zu beschränkt
ausführlich über jenen Gegenstand zu
, die Urtheile über meinen Aufsatz und
errn M. Erinnerungen verweise."

ausführliche Abhandlung über jenen Ge-
, die mir nunmehr gleichsam oblag, ver-
und diese Abhandlung ist die Gegenwär-
h hoffe, daß sie deutlich genug auch die
gegen die Einwendung des Herrn Moll-
rlegen wird. Insbesondere dient der 18.
hrsatz 5. zur Antwort auf No. ... seiner

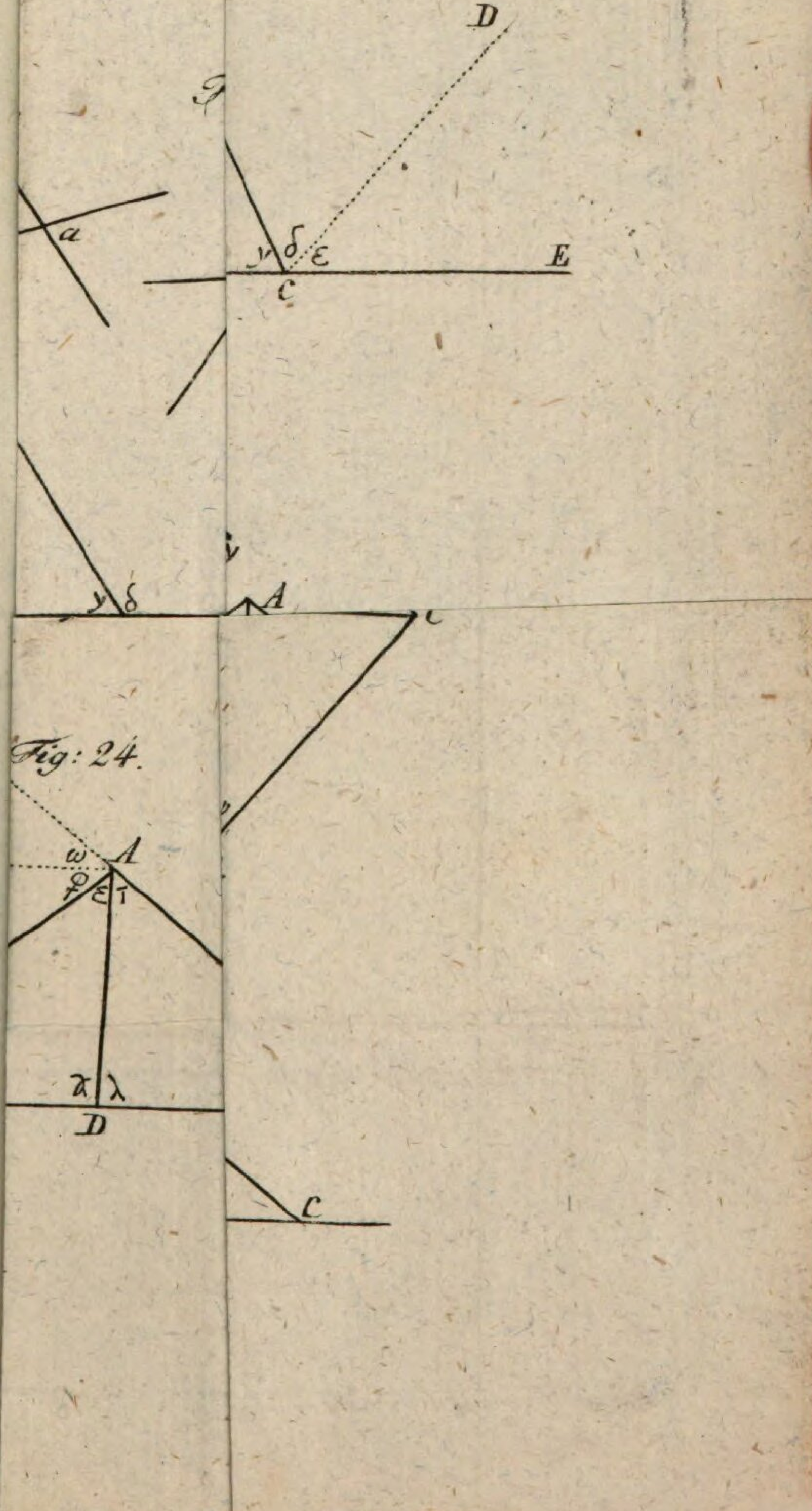
Einwendungen gegen meine Sätze. Ferner wünsche ich, daß die kleine Arbeit, da nunmehr der Weg auf welchen sie mitgetheilt wird, schicklicher seyn mag, als der durch das oben genannte gelehrte Blatt, ihrem Gegenstande einige Theilnahme erwecken und mehrere Kenner aufmuntern möge, demselben diejenige Aufmerksamkeit zu schenken, die er verdient.

Darf ich von meinen eigenen Beziehungen auf den Gegenstand sprechen, so rühme ich mich, versichern zu dürfen, daß es mir völlig eben so lieb seyn wird, wenn die Wahrheit auch meinen Ansichten sollte entgegengesetzt seyn als wenn ich sie getroffen haben sollte, sobald nur irgend etwas, um der Wahrheit näher zu kommen, geschieht. Die Wissenschaft allein liegt mir am Herzen, und ich habe die Ueberzeugung, daß, was je für sie gethan wird, ihr allein gehört. Deshalb, und weil man in allen Bestrebungen, die aufrichtig für ein solches Gemeingut gemacht werden, auch nur mit ihm es zu thun hat, glaube ich denn auch den Wunsch hegen zu dürfen, daß wenn man durch Belehrungen mich erfreuen sollte, dieselben so strenge begründet werden und so genau bei dem Gegenstande bleiben mögen, als die Sache einer ernsten Wissenschaft es zu fordern berechtigt ist.

Taf: I.



Taf: II.



Taf: IV
D
μ
α
λ
C
E
34.
E
α
36.
ε
γ
C
F
III.
B

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Crelle, August L.,

Ueber Parallelen-Theorien und das System in der Geometrie

Berlin 1816

Math.p. 96 gb

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081632-1